

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874

АВТОМОДУЛЯЦИОННЫЕ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ  
И ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ  
ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

© 2025 г. А. П. Иванов<sup>а, \*</sup>, В. Г. Шавров<sup>б</sup>, В. И. Щеглов<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина,  
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация

<sup>б</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: alivaht@mail.ru

Поступила в редакцию 09.02.2023 г.

После доработки 10.03.2024 г.

Принята к публикации 25.02.2025 г.

Рассмотрены автомодуляционные и хаотические колебания в системе из двух связанных осцилляторов, возбуждаемые внешней периодической силой. Предполагается, что первый осциллятор обладает кубической нелинейностью и связан со вторым осциллятором квадратичной связью. Приведены два примера задач, приводящих к такой модели: первая задача – это задача возбуждения мощного гиперзвука в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами; вторая – задача возбуждения шумовых электромагнитных колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Отмечено, что обе задачи могут быть сведены к решению упрощенной системы из двух укороченных уравнений колебательного типа, первое из которых соответствует магнитному осциллятору, а второе – упругому или электродинамическому. Получены развертки колебаний по времени, параметрические портреты для смещения и его производной, а также частотные спектры возбуждаемых колебаний в широком интервале амплитуды возбуждения. Выявлены два основных режима колебаний: режим № 1 – мультигармонический регуляризированный, режим № 2 – мультигармонический квазихаотический, которые, начиная с регулярного, поочередно сменяют друг друга по мере увеличения уровня возбуждения.

*Ключевые слова:* нелинейные колебания, связанные осцилляторы, хаотические колебания

DOI: 10.31857/S0033849425030054, EDN: FVRIEA

ВВЕДЕНИЕ

Многие магнитные явления отличает наличие многообразных нелинейных процессов и свойств, активно исследуемых современной физикой. К таким явлениям в первую очередь можно отнести ферромагнитный резонанс и распространение магнитоэластических волн в магнитных средах. К примеру, действие сильного однородного электромагнитного СВЧ-поля приводит к параметрическому возбуждению неоднородных обменных спиновых волн, обладающих автомодуляционными и хаотическими свойствами [1, 2]. Электродинамический резонатор и помещенный в него ферритовый диск образуют колебательную систему, спектр частот которой имеет ярко выраженный шумовой характер [3, 4]. Стохастическим образом происходит распространение

пучка магнитоэластических волн в ферритовой пленке внутри волноведущего канала, образованного периодически модулированным полем типа “вала” [5].

В значительной мере свойства нелинейной динамики проявляются при взаимодействии колебаний разных типов, а именно магнитных и упругих. Так, превышение порогового уровня электромагнитной накачки приводит к параметрическому возбуждению упругих волн с частотами на три порядка меньшими частоты возбуждения, а упругая накачка может вызвать генерацию параметрических обменных спиновых волн в той же степени, что и электромагнитная [1].

Для описания многих нелинейных явлений в магнитных и магнитоупругих средах может быть задействована упрощенная модель из двух

связанных осцилляторов — магнитного и упругого. В работах [6–8] показано, что данная модель может быть использована для интерпретации нелинейного возбуждения мощных гиперзвуковых колебаний в нормально намагниченной ферритовой пластине. В рамках квадратичного приближения в такой модели при сопоставлении ее параметров с характеристиками реальных материалов наблюдаются различные режимы колебаний, в том числе имеющие автомодуляционный и хаотический характер [9–12]. Указанные режимы могут быть интерпретированы путем введения модели динамического потенциала, как это сделано в работах [13–18]. Связь характеристик наблюдаемых режимов с потенциальной энергией системы во многом объясняет динамику системы, но при этом механизмы смены режимов, роль степени нелинейности осцилляторов, а также влияние нелинейности связи в достаточной мере все еще не изучены.

Именно рассмотрению таких механизмов и выявлению критериев, влияющих на них, посвящена данная работа. Основное внимание в статье уделено колебаниям регулярного и хаотического характера, происходящим в системе из двух осцилляторов при условии кубической нелинейности одного из них и наличии квадратичной связи между осцилляторами.

Наиболее характерными задачами, в которых реализуются подобные колебательные системы, являются задача возбуждения мощного гиперзвука магнитоупругим преобразователем [6–18], а также задача возбуждения электромагнитных колебаний шумового характера в ферритовом диске [3–4]. Как показано в работах [9–12], обе эти задачи могут быть сведены к решению системы из двух уравнений второго порядка, имеющим довольно простую структуру. При этом первое уравнение в такой системе определяет колебания намагниченности и является нелинейным, а второе — линейное, соответствующее упругому смещению или полю резонатора. Связь между уравнениями, помимо линейных членов в обоих уравнениях, осуществляется также нелинейными степенными слагаемыми в уравнении для магнитного осциллятора.

### 1. МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Инструментом для анализа колебаний системы из двух связанных осцилляторов служит предложенная в работе [13] модель обобщенного потенциала. Данная модель в рамках квадратичного приближения по намагниченности позволяет интерпретировать основные режимы вынужденных колебаний, в том числе имеющие автоколебательный и хаотический характер. С учетом вклада входящих в потенциал слагаемых и пренебрегая

незначительными по величине из них, модельная система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2^2 + \delta_1 x_1^3 = A \cos(\omega_0 t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0, \quad (2)$$

где  $x_{1,2}$  — координатные переменные,  $\beta_{1,2}$  — параметры затухания,  $\omega_{1,2}$  — собственные частоты осцилляторов. Параметр  $\delta_1$  определяет нелинейность первого осциллятора, а коэффициенты  $\gamma_{1,2}$  — связь осцилляторов. Амплитуда и частота возбуждающей силы задаются соответственно значениями  $A_0$  и  $\omega_0$ . Общая нелинейность системы сосредоточена в первом уравнении в виде нелинейного слагаемого третьей степени и слагаемого связи осцилляторов во второй степени. При этом второе уравнение системы является линейным.

Система (1), (2) не является симметричной, т.е. в случае ротации индексов 1→2 и 2→1 уравнения друг в друга не переходят. Эта система представляет собой частный случай симметричной системы вида:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 x_2^{\alpha_1} = A_1 \cos(\omega t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 x_2 + \delta_2 x_2^3 + \gamma_2 x_1^{\alpha_2} = 0, \quad (4)$$

в которой единственным асимметричным элементом является возбуждающая сила  $A_i \cos(\omega t)$  в первом уравнении. Для выполнения условия полной симметрии можно и во второе уравнение системы (3), (4) добавить аналогичное слагаемое, что в реальной физической системе, например в случае возбуждения гиперзвука, будет означать возбуждение упругой подсистемы. Исследование свойств и поведения системы при одновременном возбуждении двух осцилляторов представляют из себя отдельную задачу, и в данной работе не рассматривается. Все дальнейшие рассуждения в работе относятся к системе (1), (2) как частному случаю системы (3), (4).

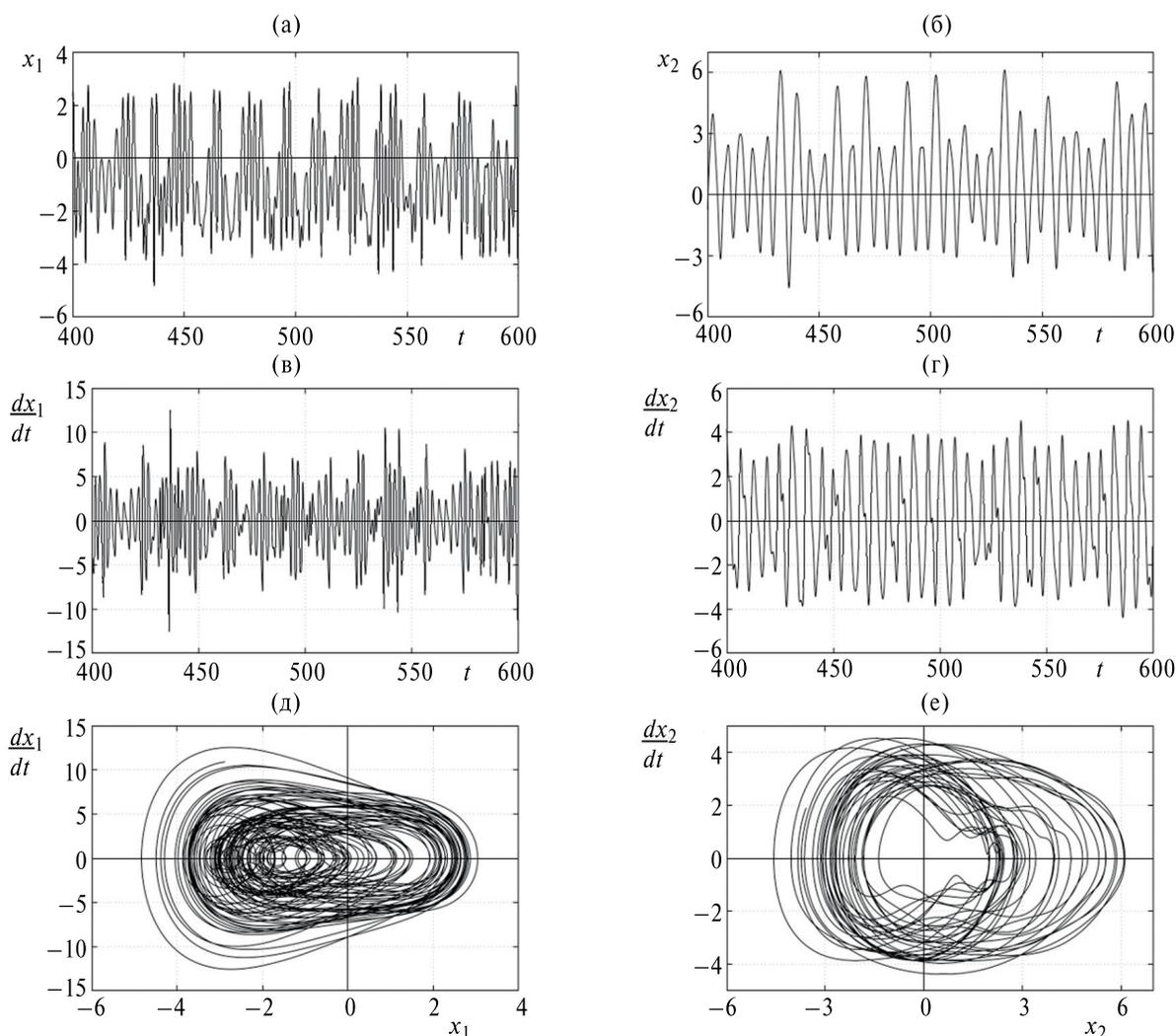
При использовании реальных параметров магнитоупругой системы в работах [7, 8] было показано, что система (1), (2) обладает целым набором разного рода колебаний. Среди прочих были выявлены два основных типа автоколебаний: синхронные, с периодом равным периоду возбуждающей силы, и асинхронные, с периодом в большинстве случаев значительно превышающим период возбуждающей силы. Для синхронных колебаний важным условием является линейность обоих осцилляторов при нелинейной связи. В то время как асинхронные колебания проявляются при нелинейном первом осцилляторе, линейном втором и сохраненной нелинейности связи. Каждому из этих типов колебаний свойственны свои режимы, характеризующиеся определенными наборами

параметров. Так, у синхронных колебаний можно выделить пять основных режимов: регулярный синусоидальный, регулярный с расщеплением, регулярный без расщепления, нерегулярный квазихаотический и нерегулярный расходящийся. Основными атоколебательными режимами асинхронных колебаний являются: навязанный, стохастический и регулярный.

Такое многообразие видов колебаний объясняется отсутствием строгой схемы в подборе параметров для системы (1), (2). В работах [7, 8] рассмотрение свойств системы приводится на основе данных реальных экспериментов, что носит частный характер и не позволяет выявить общие закономерности в поведении системы, а также роль отдельных слагаемых в формировании выявленных режимов колебаний.

В данной работе предпринята попытка в некоторой степени систематизировать исследование

влияния уровня возбуждения на хаотический характер колебаний путем анализа спектральных свойств возбуждаемых колебаний. Для этого в качестве параметров системы (3), (4) приняты максимально простые числовые значения. Будем считать собственные частоты осцилляторов равными друг другу и частоте возбуждающей силы, также для обоих осцилляторов примем равными параметры затухания. Нелинейность системы обеспечивается нелинейностью первого осциллятора и слагаемым связи для первого осциллятора в квадратичном виде, при этом параметры связи обоих осцилляторов равны. Таким образом, используемые для рассмотрения режимов колебаний параметры имеют следующий вид:  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ;  $\omega = 1$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 0.05$ ;  $\delta_1 = 1$ ;  $\delta_2 = 0$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ;  $\alpha_1 = 2$ ;  $\alpha_2 = 1$ . Величина возбуждения  $A_1$  варьируется в достаточно широких пределах, и конкретные ее значения указаны отдельно по тексту.



**Рис. 1.** Развертки колебаний во времени: первого (а) и второго осцилляторов (б); колебания производных от смещения первого (в) и второго (г) осцилляторов; параметрические портреты первого (д) и второго (е) осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_1 = 5$ .

2. ТИПИЧНЫЕ ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СРЕДНЕМ УРОВНЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Рассмотрим характерные виды колебаний для случая умеренного возбуждения  $A_1 = 5$ . На рис. 1 для первого и второго осцилляторов показаны: развертки колебаний по времени (рис. 1а, 1б), развитие колебаний соответствующих производных от смещения (рис. 1в, 1г), а также параметрические портреты осцилляторов (рис. 1д, 1е). Колебания рассматриваются на интервале, когда в системе уже завершились релаксационные процессы, вызванные включением возбуждения.

Как видно из рис. 1, для первого осциллятора колебания смещения (рис. 1а) и его производной (рис. 1в) имеют отчетливый шумовой характер и происходят с частотами, значительно превышающими частоту возбуждающей силы. Кроме того, колебания смещения отличает наличие постоянной составляющей, что приводит к сдвигу центральной линии колебаний от нулевого уровня примерно на единицу. Параметрический портрет первого осциллятора (рис. 1д) представлен в виде размазанной горизонтальной восьмерки, центры колец которой размещены в  $x_1 = 1$  и  $x_1 = -2$ . Такое нарушение симметрии восьмерки вызвано указанным сдвигом центральной линии колебаний. Расширение левого кольца восьмерки относительно правого обусловлено резкими скачками амплитуды смещения в отдельные моменты времени (рис. 1а).

В отличие от первого осциллятора колебания смещения второго осциллятора (рис. 1б), а также

колебания его производной (рис. 1г), носят более упорядоченный характер, и происходят с частотой близкой к частоте возбуждения. Поскольку единственным источником возбуждения второго осциллятора являются колебания первого, то амплитуда его колебаний так же меняется хаотичным образом, но чаще всего эти изменения происходят плавно. Такое поведение амплитуды колебаний сказывается на параметрическом портрете второго осциллятора, который представляет собой наложенные друг на друга со смещением по горизонтали размытые кольца (рис. 1е). Получая возбуждение от первого осциллятора, траектория на параметрическом портрете описывает кольцо до тех пор, пока очередной импульс возбуждения не сместит ее на новое место.

На рис. 2 для первого и второго осцилляторов приведены: частотные спектры колебаний (1а, 1б) и спектры колебаний производных от их смещения (1в, 1г). Из рисунка видно, что спектр колебаний смещения и производной первого осциллятора (рис. 2а, 2в) значительно разнообразнее в сравнении со спектрами второго осциллятора (рис. 2б, 2г), что объясняется шумовым характером этих колебаний.

В спектре колебаний смещения отчетливо выделяются частоты, соответствующие половине частоты возбуждения, второй и третьей гармонике возбуждения, а также частоте примерно равной  $2.5\omega$ . Спектр колебаний производной так же имеет несколько явных максимумов: сопоставимые между

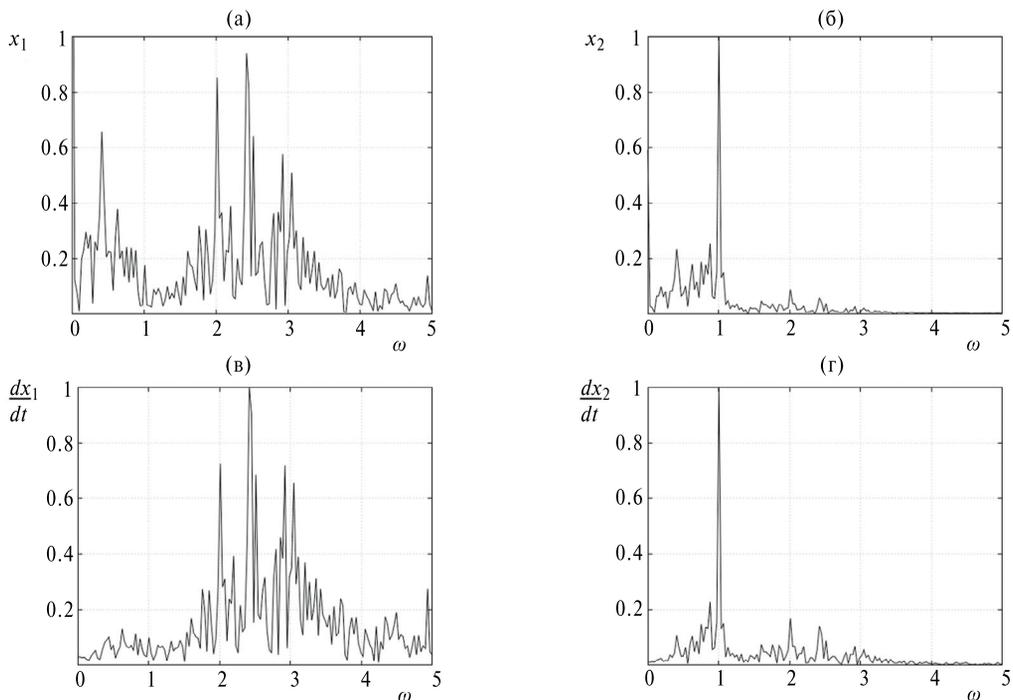


Рис. 2. Развертки колебаний по частоте: первого (а) и второго (б) осцилляторов; производных от смещения первого (в) и второго (г) осцилляторов. Амплитуда возбуждения  $A_1 = 5$ .

собой максимумы вблизи второй и третьей гармоник и максимальный посередине между ними. При этом сколько-нибудь выраженный максимум на частоте, равной половине частоты возбуждения, в спектре колебаний производной отсутствует.

Спектры второго осциллятора (рис. 2б, 2г) значительно беднее. Их отличает наличие единственных для каждого из спектров ярко выраженного максимума строго на частоте возбуждения. Слева от каждого из максимумов наблюдаются наборы небольших пиков частот по величине примерно в пять раз уступающих основным максимумам. Наличие таких частотных пиков в совокупности с основной частотой приводит к отмеченному выше плавному изменению амплитуды разверток по времени второго осциллятора (рис. 1б, 1г). На спектрах, аналогично спектрам первого осциллятора, правее от основных пиков проявляются всплески на частоте второй гармоники возбуждения и на частоте  $2.5\omega$ , но они не особо значительны. Для спектра колебаний производной от смещения эти всплески выражены отчетливее. Такое небогатое разнообразие частот в спектре второго осциллятора объясняется линейностью, значительно отличающей его от сильно нелинейного первого осциллятора.

Рассмотренные спектры колебаний указывают на то, что в связке двух осцилляторов, первый из которых является нелинейным, а второй — линейным, режимы колебаний, а в данном случае хаотический, формируются посредством динамики первого осциллятора. Второй осциллятор во многом выполняет роль ведомого.

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЖИМЫ КОЛЕБАНИЙ

Как было отмечено выше, основные характеристики колебаний системы (1), (2) определяются первым осциллятором. При выбранных в данной работе параметрах возбуждаемые в системе (1), (2) виды колебаний могут быть классифицированы на основе двух базовых режимов, задаваемых первым уравнением этой системы. В связи с этим рассмотрим основные режимы колебаний, характерные для первого уравнения системы (1), (2) в отсутствие связи со вторым осциллятором, т.е. при  $\gamma_1 = 1$ :

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 x_1 + \delta_1 x_1^3 = A \cos(\omega_0 t). \quad (5)$$

Вариационным параметром в рассмотрении будет являться амплитуда возбуждающей силы  $A$ . Другие параметры, входящие в (5), аналогичны принятым в данной работе.

На рис. 3 приведены развертки по времени смещения первого осциллятора и производной от смещения (левая колонка), параметрические портреты (центральная колонка) и спектры колебаний

(правая колонка), соответствующие различным уровням возбуждения.

Из рисунка видно, что для всех используемых значений  $A$  развертки колебаний обладают ярко выраженным периодом, соответствующим периоду возбуждающей силы. Это подтверждается и частотными спектрами, где для каждого случая присутствует значительный пик на частоте возбуждения  $\omega = 1$ . Увеличение возбуждения приводит к тому, что за счет нелинейности системы в спектры добавляются более высокочастотные составляющие, т.е. возбуждаются высшие гармоники.

Параметрические портреты колебаний, начиная с уровня возбуждения  $A = 2$ , представляют собой две связанные эллипсовидные фигуры, размещенные по обе стороны от вертикальной оси. Условно такой вид параметрического портрета можно назвать “горизонтальной восьмеркой”.

В ряде случаев параметрические портреты (рис. 3а–3в, 3д — центральная колонка) имеют четко очерченные узкие линии, сформированные многократным повторением совпадающих траекторий. Для случаев, представленных на рис. 3г, 3е — центральная колонка, подобное повторение траекторий отсутствует, что приводит к значительной размытости соответствующих параметрических портретов. Как показывают дополнительные расчеты, при увеличении интервалов разверток до нескольких тысяч единиц и более приведенные на рис. 3а–3в, 3д параметрические портреты сохраняют свою строго очерченную форму, в то время как портреты на рис. 3г, 3е полностью замазываются до сплошного пятна. Такое принципиальное отличие двух групп параметрических портретов позволяет говорить о наличии разных режимов колебаний, которым они соответствуют.

Частотные спектры всех режимов колебаний включают в себя несколько гармоник, т.е. являются мультигармоническими. За исключением случая малого возбуждения  $A = 0.1$ , где колебания происходят на одной единственной частоте, равной частоте возбуждения. Спектры колебаний, приведенные на рис. 3б, 3в, 3д — правая колонка, имеют строгую гармоническую структуру и лишены частот, не кратных частоте возбуждения. В случае рис. 3г, 3е — правая колонка в спектрах помимо частоты возбуждения и ее гармоник содержатся промежуточные составляющие, амплитуда которых сопоставима с амплитудами основных частот.

Таким образом, рассмотренные виды колебаний можно разделить на два больших класса, содержащих следующие режимы.

Режим № 1 — мультигармонический регуляризованный. Для этого режима характерен параметрический портрет с четко очерченными повторяющимися траекториями. Спектр колебаний такого режима содержит только гармоники, кратные частоте возбуждения. На рис. 3 этому режиму

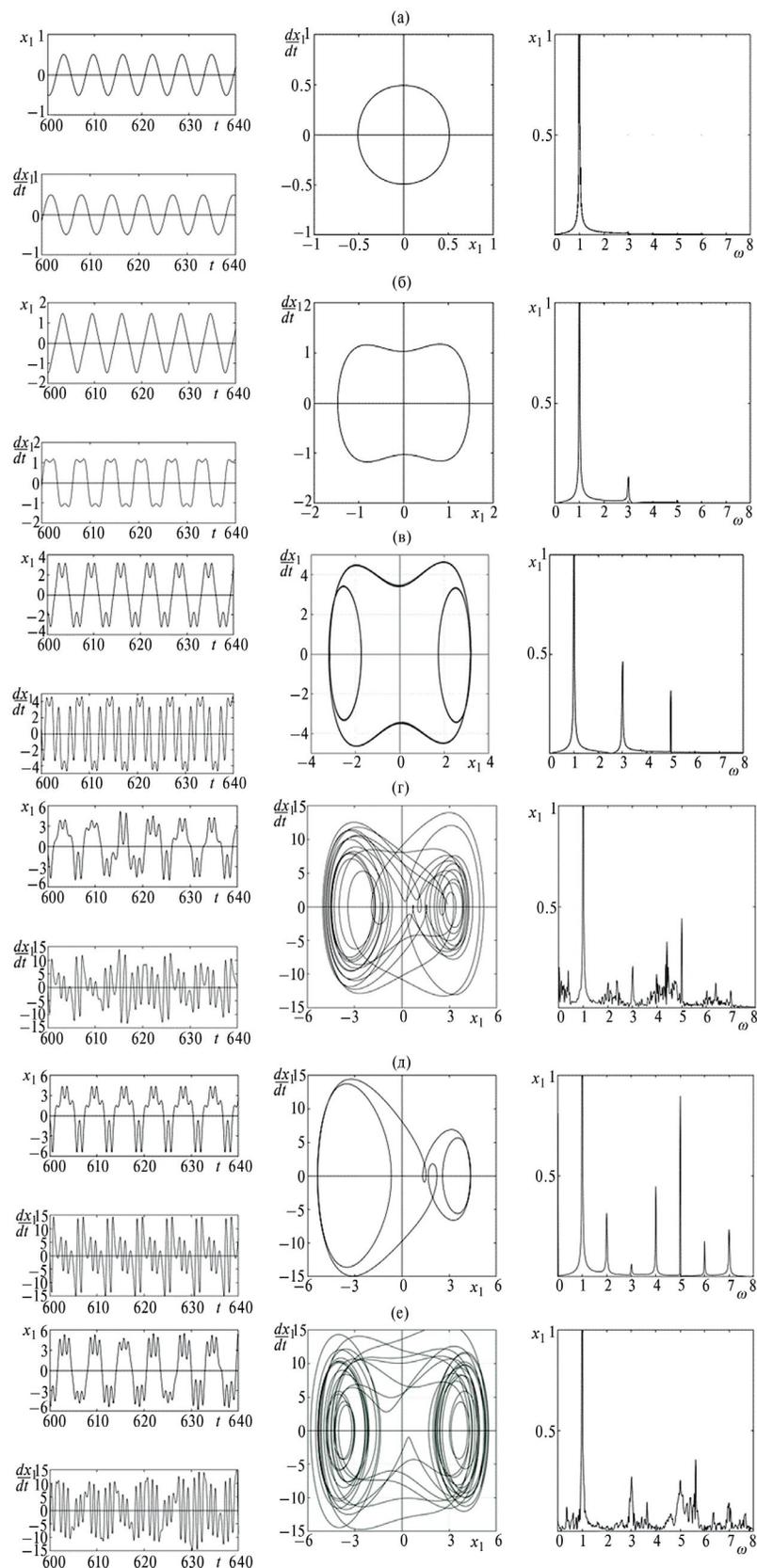


Рис. 3. Развертки по времени смещения и производной от смещения (левая колонка), параметрические портреты (центральная колонка) и спектры колебаний (правая колонка) первого осциллятора для разных значений уровня возбуждения  $A$ , соответствующие решению уравнения (5): 0.1 (а); 2 (б); 20 (в); 40 (г); 50 (д); 70 (е).

соответствуют колебания при уровнях возбуждения  $A = 0.1; 2; 20; 50$  (левая колонка).

Режим № 2 — мультигармонический квазихаотический. В этом режиме параметрический портрет сильно размазан, отсутствуют повторяющиеся траектории. В спектре колебаний, помимо гармоник, кратных частоте возбуждения, присутствуют промежуточные частоты с амплитудами, сопоставимыми с амплитудами кратных гармоник. Характерные для этого режима колебания показаны на рис. 3г и 3е — левая колонка при значениях  $A = 40$  и  $A = 70$ .

При небольшом уровне возбуждения от 0 до 35 формируется регулярный режим № 1 колебаний, который далее на интервале значений  $A$  от 35 до 45 сменяется квазихаотическим режимом № 2. С ростом возбуждения в пределах от 45 до 65 этот режим снова переходит в режим № 1, а затем при  $A$  от 65 до 73 — в режим № 2, и так далее. То есть при увеличении возбуждения, начиная с регулярного, наблюдается чередование регулярного и квазихаотического режимов. При этом смена режимов происходит без каких-либо пороговых значений амплитуды возбуждения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены автомодуляционные и хаотические колебания в системе из двух связанных осцилляторов. Один из осцилляторов содержит кубическую нелинейность, а второй линейный. Связь между осцилляторами является квадратичной. Для рассмотрения использовалась система из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, одно из которых содержит члены, характеризующие нелинейность. Приведены примеры задач, приводящих к такой системе уравнений. Первая задача — это задача возбуждения мощного гиперзвука в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами. Вторая — задача возбуждения электромагнитных колебаний шумового характера в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Отмечено, что использование для решения обеих задач системы для двух связанных осцилляторов учитывает большинство наблюдаемых нелинейных явлений, особо отмечен факт сохранения свойств автомодуляционных и хаотических колебаний. При этом решение указанных задач во многом упрощается.

В качестве инструмента для анализа колебаний выбрана модель обобщенного потенциала, позволяющая выявить основные свойства автоколебаний магнитоупругой и магнитоэлектродинамической систем. Используя данную модель и опираясь на оценку сравнительного вклада отдельных слагаемых, приведена система из двух укороченных уравнений колебательного типа, соответствующих магнитному и упругому осцилляторам.

Перечислены основные виды и режимы колебаний в такой системе.

Рассмотрено поведение системы при различных значениях амплитуды возбуждения. Построены развертки колебаний по времени, параметрические портреты для смещения и его производной, а также спектры возбуждаемых колебаний. На примере среднего уровня возбуждения рассмотрено типичное многообразие колебаний. Показано, что в хаотическом режиме развертки по времени для первого осциллятора имеют сильно выраженный шумовой характер. В колебаниях второго осциллятора основная частота колебаний совпадает с частотой возбуждения, а шумовая составляющая выражена значительно слабее. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно размазанной “горизонтальной восьмерки”, а для второго — совокупности нескольких колец, наложенных друг на друга с небольшим смещением.

Рассмотрены спектры возбуждаемых колебаний. Показано, что для первого осциллятора спектр как смещения осциллятора, так и его производной, имеет вид нескольких широких сильно изрезанных полос с явно выраженным максимумом. Для второго осциллятора спектр колебаний смещения и производной имеет хорошо упорядоченный вид вблизи основной частоты возбуждения. Отмечено, что бедность спектра второго осциллятора по сравнению со спектром первого обусловлена его линейностью.

На основе анализа параметрических портретов и спектров колебаний выполнена классификация их основных режимов. Показано, что возбуждаемые колебания могут быть классифицированы на основе двух основных режимов, задаваемых первым осциллятором. Режим № 1 — мультигармонический регуляризованный. Параметрический портрет имеет четко очерченные повторяющиеся траектории, спектр колебаний содержит только гармоники, кратные частоте возбуждения. Режим № 2 — мультигармонический квазихаотический. Параметрический портрет сильно размазан, траектории не повторяются, спектр колебаний, кроме гармоник, кратных частоте возбуждения, содержит множество промежуточных частот. Показано, что по мере увеличения амплитуды возбуждения, начиная с регулярного, имеет место очередная смена регулярного и квазихаотического режимов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ РАН и СГУ им. Питирима Сорокина.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моносов Я.А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
2. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987.
3. *Вейсс М.* // Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник ст. М., 1961. С. 281.
4. *Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И. и др.* // Сб. тр. XVII Междунар. конф. “Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие” Москва-Фирсановка, 20–22 нояб. 2009 г. М.: МЭИ, 2009. С. 100.
5. *Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2014. № 10. <http://jre.cplire.ru/jre/oct14/1/text.pdf>
6. *Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
7. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2013. № 11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
8. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Сб. тр. XXI Междунар. конф. “Электромагнитное поле и материалы”. Фирсановка, 15–17 нояб. 2013 г. М.: НИУ МЭИ, 2013. С. 199.
9. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2014. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>
10. *Шавров В.Г., Щеглов В.И., Иванов А.П.* Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука. Сыктывкар: ООО “Коми республиканская типография”, 2021.
11. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 1. С. 79.
12. *Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 3. С. 297.
13. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2015. № 5. <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>
14. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2015. № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>
15. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 7. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>
16. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 8. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>
17. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 8. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>
18. *Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Сб. тр. XXVI Междунар. конф. “Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)”. Москва, 23–24 нояб. 2018 г. М.: ИНФРА-М, 2018. С. 243.

## SELF-MODULATING QUASI-REGULAR AND CHAOTIC OSCILLATIONS IN A NONLINEAR SYSTEM OF TWO CONNECTED OSCILLATORS

© 2025 A. P. Ivanov<sup>a, \*</sup>, V. G. Shavrov<sup>b</sup>, V. I. Shcheglov<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,  
Oktabr'skii Prosp., 55, Syktyvkar, Komi Republic, 167001 Russian Federation*

<sup>b</sup>*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, RAS,  
Mokhovaya Str., 11, Build. 7, Moscow, 125009 Russian Federation*

\*E-mail: [alivaht@mail.ru](mailto:alivaht@mail.ru)

Received February 9, 2023; revised March 10, 2024; accepted February 25, 2025

Self-modulating and chaotic oscillations in a system of two coupled oscillators excited by an external periodic force are considered. It is assumed that the first oscillator has cubic nonlinearity and is connected to the second oscillator by a quadratic coupling. Two examples of problems leading to such a model are given: the first task is the task of exciting powerful hypersound in a ferrite plate with magnetically elastic properties; the second is the task of exciting electromagnetic noise vibrations in a ferrite disk placed in an electrodynamic resonator. It is noted that both problems can be reduced to solving a simplified system of two shortened oscillatory type equations, the first of which corresponds to a magnetic oscillator, and the second to an elastic or electrodynamic one. Time-based oscillation scans, parametric portraits for the displacement and its derivative, as well as frequency spectra of excited oscillations in a wide range of excitation amplitude are obtained. Two main oscillation modes have been identified: mode No. 1 — multiharmonic regularized, mode No. 2 — multiharmonic quasi-chaotic, which, starting from regular, alternately replace each other as the level of excitation increases.

*Keywords:* nonlinear oscillations, coupled oscillators, chaotic oscillations