

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ВНЕШНЕГО ВОЗБУЖДЕНИЯ И НАЧАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ

© 2025 г. А. П. Иванов^{а, *}, В. Г. Шавров^б, В. И. Щеглов^б

^аСыктывкарский государственный университет им. Питиримы Сорокина,
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация

^бИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: alivaht@mail.ru

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 25.02.2025 г.

Принята к публикации 26.02.2025 г.

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных осцилляторов. Приведено краткое описание двух реальных физических систем, допускающих возбуждение хаотических колебаний, обладающих нестационарным запаздыванием. Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным, а второй — линейным. Для такой модели приведена система двух дифференциальных уравнений второго порядка. Произведено упрощение данной системы с сохранением ядра, обеспечивающего эффект запаздывания высокоамплитудных хаотических колебаний. Рассмотрена возможность замены в системе внешнего возбуждения на начальное смещение одного из осцилляторов.

Ключевые слова: нелинейные колебания, связанные осцилляторы, хаотические колебания, задержка колебаний

DOI: 10.31857/S0033849425020063, **EDN:** GMBIUC

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные и нестационарные процессы являются основополагающими во многих задачах современной физики. Большим разнообразием таких задач богата и физика магнитных явлений. Здесь проявление нелинейности наблюдается в широком диапазоне явлений: от процессов динамики доменных структур до параметрического возбуждения обменных спиновых волн и ударного изменения магнитного состояния вещества под действием мощного импульса света от фемтосекундного лазера [1–3]. В условиях ферромагнитного резонанса наблюдаются различные явления автоколебательного и стохастического характера: автомодуляция за порогом обменных волн, шумовой характер колебаний в системе феррит-резонатор и многие другие. Широкий спектр таких явлений обеспечивается взаимодействием магнитных колебаний

с упругими: возбуждение упругих колебаний в диапазоне СВЧ, упругая накачка спиновых волн, упругий резонанс в условиях параметрического возбуждения обменных волн, а также взаимодействие магнитных и электромагнитных колебаний в резонаторе, где тоже наблюдаются автомодуляционные и стохастические явления [4, 5].

Одной из важных практических задач современной физики является возбуждение мощного гиперзвука с помощью магнитострикционного преобразователя, работающего в условиях ферромагнитного резонанса. Использование в этой задаче двухслойной структуры позволяет реализовывать нелинейные колебания, приводящие к увеличению мощности гиперзвука до 100 раз по сравнению с линейным режимом, и одновременно с этим достигается расширение полосы преобразователя до пяти раз [6–8].

Зачастую указанные явления для своей интерпретации требуют использования внушительного математического аппарата, сложность которого вызывает необходимость создания более простых моделей, в достаточной степени описывающих наблюдаемые физические явления. Одной из таких моделей является модель двух связанных осцилляторов, один из которых обладает нелинейными свойствами [9]. Свое развитие модель получила в работе [10], где применительно к задаче возбуждения гиперзвука рассматриваются сильно нелинейные колебания в магнитоупругой среде. В этой работе в качестве основного элемента преобразователя рассматривается нормально намагниченная ферритовая пластина, имеющая магнитоупругие свойства. Роль одного осциллятора выполняет магнитная подсистема, в которой возбуждается ферромагнитный резонанс, а роль другого играет упругий резонатор, в котором по толщине ферритовой пластины возбуждаются упругие колебания. Предложенная модель позволила выявить важные характеристики взаимодействия колебаний осцилляторов. С ее помощью в рамках линейного и квадратичного приближений были определены различные режимы вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения, в том числе имеющие автоколебательный и хаотический характер. Были получены аналитические выражения, связывающие параметры предложенной системы уравнений с параметрами материала — намагненностью и коэффициентами упругости.

В работах [11–13] показано, что рассматриваемая модель связанных осцилляторов в режиме умножения частоты допускает задержку развития колебаний после включения возбуждения на период времени, намного превосходящий времена релаксации обоих осцилляторов. Для интерпретации феномена запаздывания колебаний была использована модель динамического потенциала, а также в некоторой степени механизм биений между собственными колебаниями магнитного осциллятора и возбуждающим сигналом [14]. Тем не менее, объяснение механизмов запаздывания колебаний все еще является не полным, поскольку остались нераскрытыми роль различных компонент системы уравнений, степень влияния нелинейности и характера связи между осцилляторами на это явление, а также роль релаксационных процессов и уровня возбуждения.

Таким образом, основной задачей данной работы является дальнейшая проработка модели нестационарного запаздывания колебаний, ее математической сущности, приведение к максимально упрощенному виду для выявления главных характеристик и более детальной интерпретации наблюдаемых явлений.

1. БАЗОВАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ОБЩИЙ ХАРАКТЕР КОЛЕБАНИЙ

В основе данной работы лежат две базисные задачи — генерация мощного гиперзвука магнито-стрикционным преобразователем и возбуждение шумовых колебаний в ферритовом диске, находящемся в электродинамическом резонаторе. Как показано в работе [15], обе эти задачи могут быть интерпретированы с помощью колебаний в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромангнитным и обладает нелинейными свойствами, а второй — упругим или электродинамическим и исключительно линейным. В математическом представлении эти задачи сводятся к одной и той же системе из двух дифференциальных уравнений второго порядка, одно из которых соответствует колебаниям магнитной системы и содержит нелинейные слагаемые, а второе — линейное уравнение, соответствующее упругой или электродинамической системе.

Квадратичное приближение для намагниченности позволяет ввести динамический потенциал в виде степенной функции четвертого порядка по двум переменным, учитывающий изменения колебаний намагниченности под действием упругого возмущения. При этом оба уравнения и их связь приобретают дополнительные нелинейные слагаемые, возникшие вследствие последовательного учета граничных условий. Полученная таким образом обобщенная модельная система уравнений имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} x_1 + a_{14} x_2 + \\ & + d_{11} x_1^2 + d_{12} x_1 x_2 + d_{13} x_2^2 + \\ & + b_{11} x_1^3 + b_{12} x_1^2 x_2 + b_{13} x_1 x_2^2 + b_{14} x_2^3 = A_0 \cos(\omega_0 t); (1) \\ & a_{21} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} x_2 + a_{24} x_1 + \\ & + d_{21} x_1^2 + d_{22} x_1 x_2 + d_{23} x_2^2 + \\ & + b_{21} x_1^3 + b_{22} x_1^2 x_2 + b_{23} x_1 x_2^2 + b_{24} x_2^3 = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

где коэффициенты a_{ik}, b_{ik}, d_{ik} определяются магнитными и упругими параметрами материала пластины. Уравнения (1) и (2) содержат нелинейность третьей степени, причем как самих осцилляторов, так и их связи. При этом система является симметричной относительно индексов “1” и “2”, а отсутствие возбуждения во втором уравнении в данном случае принципиальным не является.

В работах [11–13, 15] система (1), (2) была подвергнута некоторой трансформации с целью получения ряда автомодуляционных режимов. Подробно были рассмотрены слагаемые, отвечающие за линейную связь второго осциллятора с первым и учитывающие

более высокую степень нелинейной связи. В результате система (1), (2) приобрела вид [11]:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = A \cos(\omega_0 t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (4)$$

Здесь произведена следующая замена обозначений:

$$a_{11} \rightarrow 1, a_{21} \rightarrow 1, a_{12} \rightarrow \beta_1, a_{22} \rightarrow \beta_2, a_{13} \rightarrow \omega_1^2, a_{23} \rightarrow \omega_2^2, \\ a_{14} \rightarrow \gamma_1, a_{24} \rightarrow \gamma_2, b_{11} \rightarrow \delta, b_{12} \rightarrow \eta, A_0 \rightarrow A, \quad (5)$$

а также сделана нормировка параметров системы на коэффициент при второй производной. Остальные коэффициенты из системы (1), (2) были приняты равными нулю. Таким образом, в системе (3)–(4) были введены обозначения: x_1, x_2 – координатные переменные, β_1, β_2 – параметры затухания, ω_1, ω_2 – собственные частоты осцилляторов, γ_1, γ_2 – коэффициенты линейной связи, δ – параметр нелинейности первого осциллятора, η – параметр нелинейной связи, A и ω_0 – амплитуда и частота возбуждающей силы.

Как показано в работах [11–14], в режиме умножения частоты после включения возбуждения система (3), (4) демонстрирует характерную особенность развития колебаний. Сначала формируются близкие к синусоидальным колебания незначительной амплитуды, а затем через время, превышающее времена релаксации обеих колебательных систем, амплитуда колебаний возрастает на несколько порядков. Вид этих высокоамплитудных колебаний близок к хаотическому. Кроме этого, они имеют определенный порог по уровню возбуждения или начального смещения. Если этот порог возбуждения не превышен, то колебания продолжают оставаться малоамплитудными сколь угодно продолжительное время. Наряду с этим многократное превышение порога возбуждения приводит к исчезновению интервала задержки, и высокоамплитудные хаотические колебания возникают практически сразу после включения возбуждения.

2. ВЛИЯНИЕ СПОСОБОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ СИСТЕМЫ НА ФОРМИРОВАНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Для детального изучения система (3), (4) несколько сложна, поскольку в общем случае содержит десять независимых изменяемых параметров. Поэтому для упрощения анализа представляется целесообразным выявить роль отдельных слагаемых обоих уравнений с тем, чтобы некоторые

из них можно было исключить из рассмотрения, и оставить только те, которые непосредственно причастны к явлению запаздывания высокоамплитудных колебаний.

Как уже отмечалось выше, явление запаздывания колебаний критично к уровню возбуждения системы. Поэтому рассмотрение роли параметров следует начать именно с возбуждения, которое представлено в системе единственным слагаемым $A \cos(\omega_0 t)$. Это слагаемое обеспечивает поступление энергии в систему, которая впоследствии рассеивается за счет диссипации, выраженной слагаемыми $\beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t}$ и $\beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t}$. Если эти диссипативные слагаемые убрать, то очевидно, что амплитуда колебаний будет расти неограниченно. Альтернативным способом возбуждения колебаний в системе может являться некоторое начальное смещение одного из осцилляторов, но при этом в системе должны отсутствовать диссипация энергии и внешнее возбуждение. Согласно общим принципам теории колебаний такая система в отсутствие диссипации и сохранения механизмов превращения энергии будет колебаться вблизи какого-то среднего положения с частотой, которая определяется параметрами самой системы. Таким образом, принимая $A = 0, \beta_1 = \beta_2 = 0$, система (3)–(4) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (7)$$

Проверим, реализуется ли в системе (6)–(7) задержка высокоамплитудных колебаний после сообщения одному из осцилляторов начального смещения. Для этого сравним колебания осцилляторов в системах (3), (4) и (6), (7) при равных параметрах, не отвечающих за диссипацию и возбуждение.

На рис. 1 и рис. 2 показаны колебания и параметрические портреты соответственно первого и второго осцилляторов, соответствующие системам (3)–(4) (левый столбец) и (6)–(7) (правый столбец).

С целью повышения наглядности и удобства сравнения рисунков уровень возбуждения $A = 70$ и начальное смещение $x_{10} = 2.16$ подбирались таким образом, чтобы времена запаздывания развития колебаний были одного порядка. В данном случае для внешнего возбуждения время запаздывания составляет 4.2 ед. времени, для начального смещения – 3 ед. времени. Выбор других значений возбуждения и смещения принципиально картину не меняет.

Если сравнить рисунки попарно по горизонтали, можно заметить, что характер колебаний в обоих случаях один и тот же. У обоих осцилляторов после окончания задержки начинают развиваться

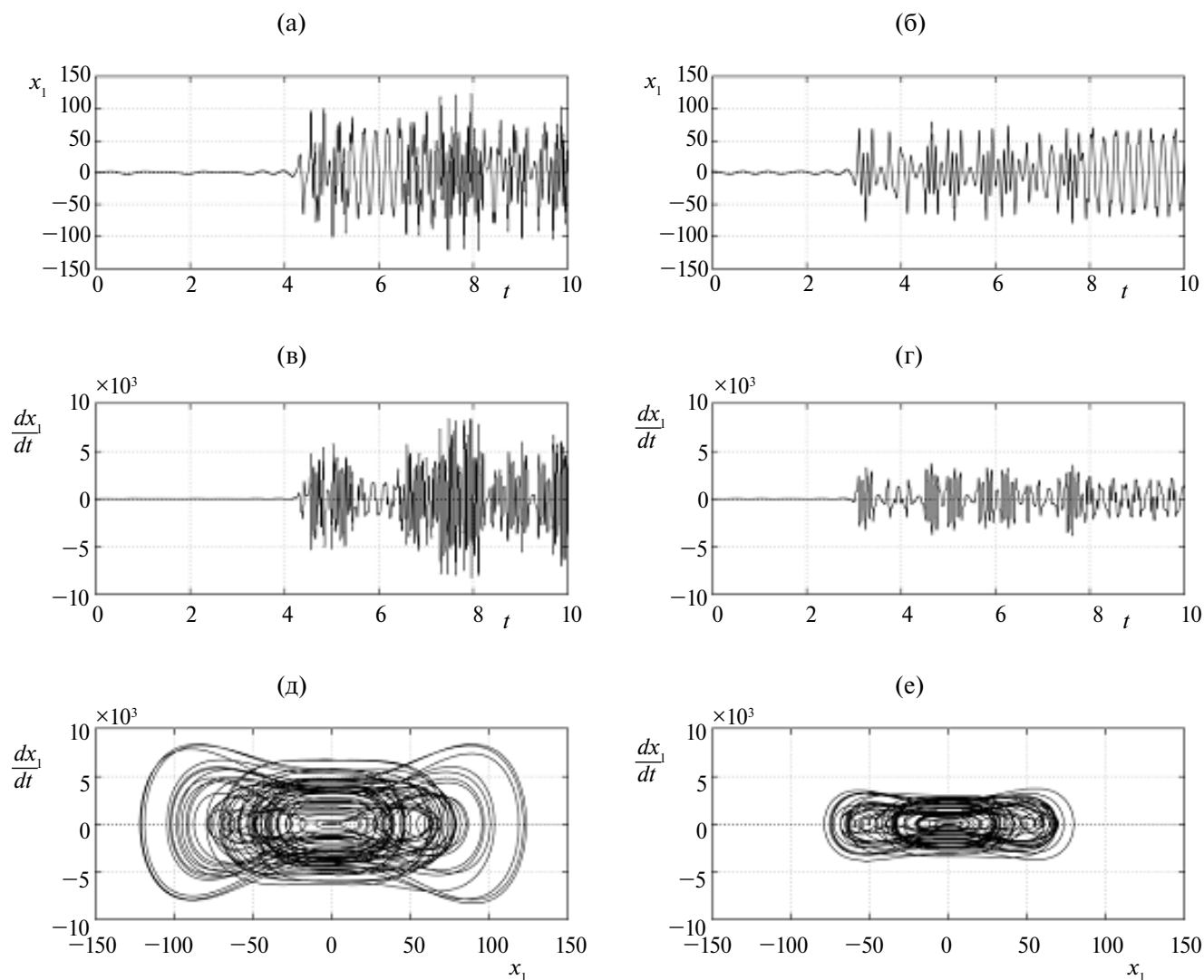


Рис. 1. Развитие колебаний во времени, производные от смещения и параметрические портреты первого осциллятора в случаях внешнего возбуждения (левая колонка) и начального смещения (правая колонка). Построения (а), (в), (д) соответствуют решению системы (3)–(4), а построения (б), (г), (е) – решению системы (6)–(7). Параметры построений (а), (в), (д): $\omega_1 = 5$; $\omega_2 = 15$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 0.1$; $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 10$; $\delta = 5$; $\eta = -200$; $A = 70$; $\omega_0 = 5$; $x_{10} = x_{20} = 0$; $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$. Параметры построений (б), (г), (е): $\omega_1 = 5$; $\omega_2 = 15$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0$; $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 10$; $\delta = 5$; $\eta = -200$; $A = 0$; ω_0 – произвольное; $x_{10} = 2.16$; $x_{20} = 0$; $\frac{dx_1}{dt} = 0$; $\frac{dx_2}{dt} = 0$.

близкие к хаотическим колебания, амплитуда которых поддерживается в постоянных пределах.

Параметрические портреты для первого осциллятора (рис. 1 (д) и рис. 1 (е)) представляют собой “горизонтальные восьмерки”. Такой вид параметрического портрета свойственен колебаниям в системе, обладающей динамическим потенциалом с двумя минимумами [11, 15].

Параметрические портреты для второго осциллятора (рис. 2 (д) и рис. 2 (е)) по виду близки к горизонтальным овалам вследствие того, что динамический потенциал для этого осциллятора имеет всего один минимум. При этом общий характер колебаний второго осциллятора схож с колебаниями первого, поскольку возбуждение этого осциллятора происходит за счет линейной связи, описываемой коэффициентом γ_2 в уравнениях (4) и (7).

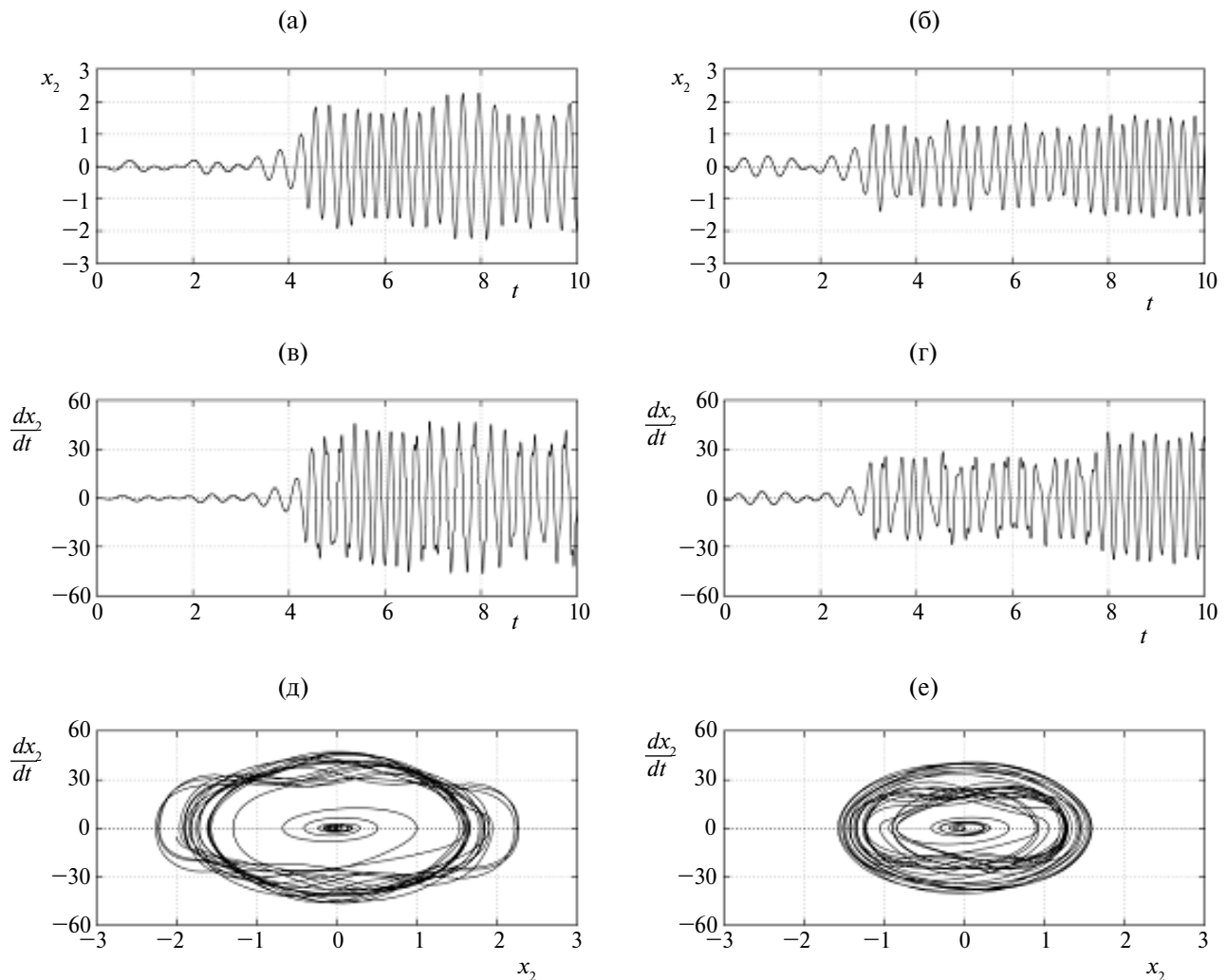


Рис. 2. Развитие колебаний во времени, производные от смещения и параметрические портреты второго осциллятора в случаях внешнего возбуждения (левая колонка) и начального смещения (правая колонка). Построения (а), (в), (д) со-ответствуют решению системы (3)–(4), а построения (б), (г), (е) – решению системы (6)–(7). Параметры построений (а), (в), (д): $\omega_1 = 5$; $\omega_2 = 15$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 0.1$; $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 10$; $\delta = 5$; $\eta = -200$; $A = 70$; $\omega_0 = 5$; $x_{10} = x_{20} = 0$; $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$. Параметры построений (б), (г), (е): $\omega_1 = 5$; $\omega_2 = 15$; $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 0$; $\gamma_1 = 10$; $\gamma_2 = 10$; $\delta = 5$; $\eta = -200$; $A = 0$; ω_0 – произвольное; $x_{10} = 2.16$; $x_{20} = 0$; $\frac{dx_1}{dt} = 0$; $\frac{dx_2}{dt} = 0$.

Таким образом, можно констатировать, что как в случае внешнего возбуждения, так и в случае начального смещения первого осциллятора, характер колебаний, описываемых системами (3), (4) и (6), (7), практически совпадает. Задержка присутствует в обоих случаях, после которой формируются высокоамплитудные хаотические колебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения высокоамплитудных хаотических колебаний в системе из двух связанных

осцилляторов, один из которых является нелинейным. Приведено краткое описание двух реальных физических систем, допускающих возбуждение хаотических колебаний. Первая система представляет собой нормально намагниченную ферритовую пластину, обладающую магнитоупругими свойствами. Такая система в условиях ферромагнитного резонанса способна генерировать интенсивные гиперзвуковые колебания, которые при определенных условиях принимают хаотический характер. Вторая система – это электродинамический резонатор волноводного типа с намагниченным по нормали ферритовым диском. При достижении

определенного порога по возбуждению в такой системе возникают электромагнитные колебания шумового характера.

Показано, что колебания в обеих системах могут быть описаны на основе одной и той же модели двух связанных осцилляторов — нелинейного и линейного. Для этого случая приведена общая система двух дифференциальных уравнений второго порядка, нелинейность в которых представлена в виде разложения в степенной ряд по двум переменным до четверного порядка. С применением квадратичного приближения были выделены основные слагаемые уравнений, содержащие помимо второй производной по времени, диссипативного и потенциального членов еще и слагаемые кубической нелинейности, а также слагаемые линейной и нелинейной связи между уравнениями.

Возбуждение колебаний в системе осуществляется путем приложения к первому осциллятору внешней периодической силы. Показано, что при достаточном уровне внешнего сигнала в системе возникают высокоамплитудные хаотические колебания, причем начало их возбуждения происходит с задержкой относительно времени приложения внешней силы.

Вследствие сложности полученной системы задачей данной работы было выделение из нее максимально упрощенного ядра, сохраняющего задержку развития высокоамплитудных хаотических колебаний. Это выделение выполнено путем отказа от слагаемых, не влияющих на рассматриваемое явление.

В качестве первого упрощения рассмотрена возможность исключения внешнего возбуждения системы. При этом для возбуждения системы использовалось начальное смещение первого осциллятора. Сохранение незатухающего режима колебаний обеспечивалось за счет обнуления диссипативных слагаемых. Показано, что при надлежащем выборе начального смещения характер колебаний каждого из осцилляторов, а также их параметрические портреты, образованные самими колебаниями в сочетании с производными по времени, практически полностью идентичен случаю внешнего возбуждения. Также определено пороговое значение начального смещения и приведена интерпретация параметрических портретов для каждого из осцилляторов на основе модели динамического потенциала.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ РАН и СГУ им. Питирима Сорокина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Станкевич Н.В., Попова Е.С., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. № 24. С. 17.
2. Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит, 2019.
3. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2020. № 6.: <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>
4. Вейсс М. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. М., 1961. С. 281.
5. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т. 7. № 9. С. 315.
6. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
7. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2013. № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>
8. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2014. Т. 59. № 5. С. 482.
9. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2013. № 11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>
10. Шавров В.Г., Щеглов В.И., Иванов А.П. Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука. Сыктывкар: ООО “Коми республиканская типография”, 2021.
11. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>
12. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>
13. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2017. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>
14. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Тр. XXVI Междунар. конф. “Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)”. Москва. 23–24 нояб. 2018. М.: ИНФРА-М, 2018. С. 243.
15. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектрон. 2020. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug20/7/text.pdf>

NON-STATIONARY DELAY OF NONLINEAR OSCILLATIONS OF A MAGNETOELASTIC SYSTEM UNDER CONDITIONS OF EXTERNAL EXCITATION AND INITIAL MAGNETIZATION OFFSET

© 2025 A. P. Ivanov^{a,*}, V. G. Shavrov^b, V. I. Shcheglov^b

^a*Pitirim Sorokin Syktyvkar State University,
Oktyabr'skii prosp., 55, Syktyvkar, Komi Republic, 167001 Russian Federation*

^b*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics RAS,
Mokhovaya Str., 11, build. 7, Moscow, 125009 Russian Federation*

*E-mail: alivaht@mail.ru

Received June 29, 2022; revised February 25, 2025; accepted February 26, 2025

The phenomenon of non-stationary delay in excitation of high-amplitude chaotic oscillations in a system of two coupled oscillators is considered. A brief description of two real physical systems that allow excitation of chaotic oscillations with non-stationary delay is given. It is shown that oscillations in both systems can be de-scribed based on the same model of two coupled oscillators, one of which is non-linear and the other is linear. A system of two second-order differential equations is given for such a model. This system is simplified while preserving the kernel that provides the effect of delay in high-amplitude chaotic oscillations. The possibility of replacing external excitation in the system with the initial displacement of one of the oscillators is considered.

Keywords: nonlinear oscillations, coupled oscillators, chaotic oscillations, oscillation delay