

РЕШЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОСЬЮ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЕМ

© 2025 г. Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП “РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина”,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.

После доработки 18.01.2023 г.

Принята к публикации 15.02.2023 г.

Приведены точные решения уравнений нерелятивистского немоноэнергетического пучка, описывающие потоки с эллиптическим сечением и пространственной осью в однородном магнитном поле при различных законах изменения осевой скорости.

Ключевые слова: электронные пучки с эллиптическим сечением, Z соленоидальные течения, Z потенциальные течения, точные решения

DOI: 10.31857/S0033849425010057, **EDN:** HJKZXU

ВВЕДЕНИЕ

Первые работы по потокам с эллиптическими орбитами частиц появились в середине прошлого века, сначала как примеры точных решений [1–3], затем в задачах о периодической электростатической фокусировке [4] и теории антипараксиальных разложений при расчете формирующих электродов [5]. Цилиндрические пучки с прямой осью и эллиптическим сечением рассматривались в работах [6, 7]. В приложении к диодным электронно-оптическим системам модели нерелятивистских потенциальных эллиптических пучков сформулированы в [8, 9], а в случае релятивистских скоростей и вихревых потоков – в работах [10–13].

Последние десятилетия характеризуются повышенным интересом специалистов по сильноточной электронике к разномасштабным задачам, в которых пучки с сильно вытянутым прямоугольным сечением существенно изменяют свои поперечные размеры. Эллиптическое сечение является нулевым приближением прямоугольника с коэффициентом заполнения $\pi/4$. Исследования по преимуществу проводятся с использованием коммерческих программ траекторного анализа, вопросы тестирования которых остаются открытыми, а несоответствие результатам теории в сингулярной прикатодной зоне (модель эмиссии в ρ - и T -режимах, тепловой зазор) и необеспеченность формирования торцов ленточных пучков очевидны [14].

Точность математических моделей не является единственным фактором, определяющим

успешную разработку новой техники. Однако неадекватность моделирования, выражаясь в не-подтвержденной способности проводить расчеты с ошибкой порядка десятых долей процента при линейной компрессии ~ 30 , и грубые для такой точности нарушения принятой гидродинамической модели потока вблизи катода, компенсирует только экспериментальная доводка прибора.

Тестирование численных моделей может быть выполнено с использованием точных решений уравнений пучка, причем особенно удобны для этого решения в элементарных функциях. В работе [15] проведено общее исследование и рассмотрены примеры пространственных стационарных немоноэнергетических электронных пучков в однородном магнитном поле с сохраняющимися параметрами эллиптических или гиперболических трубок тока, ось которых перемещается по поверхности эллиптического или гиперболического цилиндра. Выявлены также варианты эллиптических потоков с экспоненциальным изменением полуосей сечения.

Семейство рассмотренных решений характеризуется довольно разнообразным изменением скорости на пространственной оси. Ниже проведено более детальное исследование возможных эллиптических потоков с разным отношением полуосей, причем предпочтение отдано неограниченным по длине пучкам. Среди них есть варианты инжекции с ненулевой начальной скоростью с плоскости $z = 0$ и периодическим характером ее изменения разного вида, который может включать быстро осциллирующие зависимости. Возможно рассмотрение

сингулярной плоской начальной поверхности специальной структуры, которая отличается от термокатода наличием тангенциального движения частиц. Классические ρ - и T -режимы эмиссии характеризуются возможностью представить решение вблизи катода в виде ряда по $z^{1/3}$ при нулевом поле E в первом случае и по $z^{1/2}$ при $E \neq 0$ во втором. Новые сингулярные режимы, которые естественно назвать псевдо ρ - и T -режимами, при $E \neq 0$ описываются разложениями по $z^{1/3}$ и рядом по полуцелым степеням z при $E = 0$. Отсутствие физических эмитирующих поверхностей с подобными свойствами не мешает использованию этих решений для тестирования численных моделей, а неограниченная длина позволяет оценить возможность накопления ошибки.

1. ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ Z -СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В декартовой системе x, y, z с компонентами скорости u, v, w , потенциалом Φ , плотностью пространственного заряда ρ и полной энергией \mathcal{H} электронный поток с эллиптическими трубками тока в однородном магнитном поле \vec{H} описывается следующими соотношениями (принятые нормировки исключают все физические константы используемой системы единиц)

$$\begin{aligned} u &= ay + J_1(z), & v &= bx + J_2(z), \\ w &= w(z), & \rho &= \rho(z), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}b(H_z - a)x^2 + \frac{1}{2}a(H_z + b)y^2 + \\ &+ 2bH_xxz - 2aH_yyz + \Phi(z), \\ \mathcal{H} &= -\Phi + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \\ &= \frac{1}{2}(H_z - a + b)(bx^2 - ay^2) + b(J_2 - H_xz)x + \\ &+ a(J_1 + H_yz)y + \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2) + \int(H_yJ_1 - H_xJ_2)dz, \\ \Phi &= \frac{1}{2}w^2 - \int(H_yJ_1 - H_xJ_2)dz, \\ \rho &= 2ab + (a - b)H_z + \Phi''; \end{aligned}$$

$$\Phi' \equiv d\Phi/dz, \quad w = dz/d\tau \equiv \dot{z}; \quad a, b = \text{const}, \quad ab < 0.$$

В плоскости $z = \text{const}$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0, \quad (2)$$

поэтому поток удобно называть Z -соленоидальным.

Система уравнений пучка может быть трансформирована к следующим соотношениям

$$\ddot{z} + \lambda^2 \ddot{z} - \Lambda z = \omega^2 (J_0 \tau + E_0), \quad \rho w = J_0,$$

$$\begin{aligned} \ddot{J}_1 + \omega^2 J_1 &= (H_z - a + b)H_x \dot{z} - [\ddot{z} + a(H_z - a)z]H_y, \\ J_2 &= \frac{1}{H_z - a}(\dot{J}_1 - bH_x z + H_y \dot{z}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\ddot{x} + \chi^2 x = aJ_2 + \dot{J}_1, \quad y = \frac{1}{a}(\dot{x} - J_1), \quad \chi^2 = -ab > 0,$$

где J_0, E_0 — плотность тока и электрическое поле при $x = y = z = 0$.

Решение определяется корнями характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \mu^4 + \lambda^2 \mu^2 - \Lambda &= 0, \quad \mu^2 = -\frac{1}{2}\lambda^2 \pm \sqrt{\Delta}, \\ \Delta &= \frac{1}{4}\lambda^4 + \Lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Входящие в формулы (2) — (4) постоянные становятся известными при задании a, b, \vec{H} :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (H_z - a)(H_z + b), \quad \Omega^2 = 2ab + H_z(a - b), \\ \lambda^2 &= \Omega^2 + \omega^2 + H_x^2 + H_y^2, \\ \Lambda &= b(H_z + b)H_x^2 - a(H_z - a)H_y^2 - \omega^2 \Omega^2. \end{aligned} \quad (5)$$

В зависимости от соотношения констант существует пять типов решений [11].

Выражение для дискриминанта Δ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} 4\Delta &= (\xi + a_1)^2 + 2a_2\eta - \delta, \\ \xi &= H_x^2 + H_y^2, \quad \eta = H_x^2 - H_y^2, \\ a_1 &= \left[H_z - \frac{1}{2}(a - b) \right]^2 + \frac{3}{4}(a + b)^2 > 0, \\ a_2 &= b(H_z + b) + a(H_z - a), \quad \delta = a_1^2 - (\Omega^2 - \omega^2)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

На плоскости ξ, η физический смысл имеет сектор $\xi \geq \pm\eta$ с раствором $\pm 45^\circ$ возле оси ξ . Линия $\Delta = 0$ представляет собой параболу с различной ориентацией в зависимости от знака коэффициентов a_2, a_3 , разделяющую область с $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$

$$\Delta = 0 : \quad \eta + a_3 = -\frac{1}{2a_2}(\xi + a_1)^2, \quad a_3 = -\frac{\delta}{2a_2}. \quad (7)$$

Линия $\Lambda = 0$ является прямой

$$\Lambda = \frac{1}{2}[(b - a)H_z + a^2 + b^2]\xi + \frac{1}{2}a_2\eta - \omega^2 \Omega^2. \quad (8)$$

Уравнение $\lambda = 0$ описывает вертикаль (рис. 1)

$$\xi = -(H_z^2 + ab). \quad (9)$$

При заданных значениях a, b, H_z взаимное расположение этих кривых зависит от ряда неравенств, характеризующих решение конкретного типа. Область выполнения упомянутых неравенств в пределах сектора $\xi \geq \pm\eta$ определяет ареал

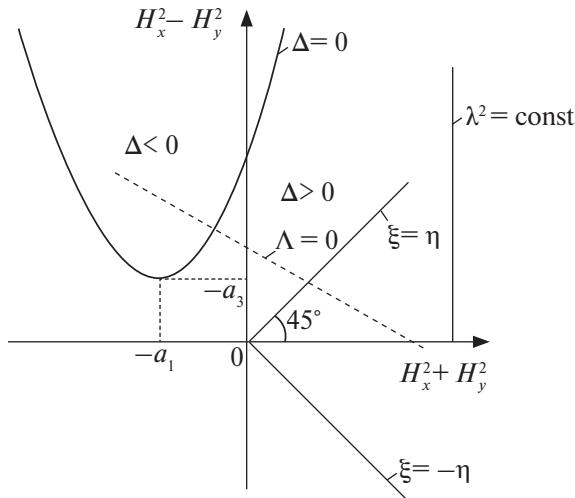


Рис. 1. Область существования Z -соленоидальных течений.

существования решения, т.е. допустимые значения компонент H_x, H_y магнитного поля.

Рассмотрим варианты, представляющие наибольший интерес.

2. РЕШЕНИЕ ПЕРВОГО ТИПА

Решение первого типа имеет два действительных и два мнимых корня

$$\Delta > 0, \quad \Lambda > 0, \quad \mu_1^2 = \mu^2 > 0, \quad \mu_2^2 = -v^2 < 0. \quad (10)$$

Обратим в нуль константы, соответствующие слагаемым с экспонентами, и рассмотрим решение вида

$$z = \tau - \gamma \sin v\tau, \quad w = 1 - \gamma v \cos v\tau. \quad (11)$$

Функции z, w нормированы на $(-\omega^2 J_0 / \Lambda)$. При $\omega^2 < 0$, а вариантов с $\omega^2 > 0$ не удалось построить, инжекция с $w > 0$ возможна, если $\Lambda < 0$. Параметрические зависимости z, w при $\gamma v < 1$ описывают укороченную циклоиду и соответствуют неограниченному по длине пучку, инжектируемому с плоскости $z = 0$. При $\gamma v = 1$ имеет место регулярная последовательность виртуальных эмиттеров с условиями ρ -режима по оси z .

Для функций J_1, J_2 имеем

$$J_1 = a_1 \exp(\mu\tau) + a_2 \exp(-\mu\tau) + J_{11},$$

$$J_2 = \frac{\mu}{H_z - a} [a_1 \exp(\mu\tau) - a_2 \exp(-\mu\tau) + J_{21}], \quad (12)$$

$$a_1, a_2 = \text{const}; \quad \mu \equiv |\omega|.$$

Величина J_{11} является частным решением неоднородного уравнения

$$J_{11} = \frac{H_z - a + b}{v^2 - \omega^2} v\gamma H_x \cos v\tau +$$

$$+ \frac{1}{v^2 - \omega^2} [v^2 - a(H_z - a)] \gamma H_y \sin v\tau - \frac{a}{H_z + b} H_y \tau + \frac{H_z - a + b}{\omega^2} H_x, \quad (13)$$

$$J_{21} = \frac{H_z - a + b}{v^2 - \omega^2} v\gamma H_y \cos v\tau - \frac{1}{v^2 - \omega^2} [v^2 + b(H_z + b)] \gamma H_x \sin v\tau - \frac{b}{H_z - a} H_x \tau + \frac{H_z - a + b}{\omega^2} H_y.$$

Константы a_1, a_2 определим через значения функций J_1, J_2 в плоскости инжекции:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(J_{10} + \frac{H_z - a}{\mu} J_{20} \right) - \frac{1}{2} (H_z - a + b) \times \left(\frac{v\gamma}{v^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \right) \left(H_x + \frac{H_z - a}{\mu} H_y \right), \quad (14)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(J_{10} - \frac{H_z - a}{\mu} J_{20} \right) - \frac{1}{2} (H_z - a + b) \times \left(\frac{v\gamma}{v^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \right) \left(H_x - \frac{H_z - a}{\mu} H_y \right).$$

Решение X неоднородного уравнения для x из (3) и соответствующее значение Y имеют вид

$$X = -\frac{\mu}{(H_z - a)(H_z - a + b)} [a_1 \exp(\mu\tau) - a_2 \exp(-\mu\tau)] + X_1, \quad (15)$$

$$Y = \frac{1}{H_z - a + b} [a_1 \exp(\mu\tau) + a_2 \exp(-\mu\tau)] + Y_1,$$

$$X_1 = \frac{H_z + b}{v^2 - \omega^2} \gamma H_x \sin v\tau - \frac{v}{v^2 - \omega^2} \gamma H_y \cos v\tau + \frac{1}{H_z - a} H_x \tau - \frac{1}{\omega^2} H_y,$$

$$Y_1 = \frac{H_z - a}{v^2 - \omega^2} \gamma H_y \sin v\tau + \frac{v}{v^2 - \omega^2} \gamma H_x \cos v\tau + \frac{1}{H_z + b} H_y \tau + \frac{1}{\omega^2} H_x.$$

В системе $\bar{x} = x - X, \bar{y} = y - Y, z$ эллиптический пучок с отношением полуосей $\sqrt{|a/b|}$ не меняет своей конфигурации, смещаясь без поворотов вдоль оси $X(\tau), Y(\tau), z(\tau)$. Пространственная ось пучка перемещается по поверхности гиперболического

цилиндра (рис. 2), уравнение которого в системе $\bar{x}_1 = x - X_1$, $\bar{y}_1 = y - Y_1$ имеет вид

$$\bar{y}_1^2 - \left(\frac{H_z - a}{\mu} \right)^2 \bar{x}_1^2 = \frac{4a_1 a_2}{H_z - a + b}. \quad (16)$$

Система \bar{x} , \bar{y} , z не является ортогональной

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (d\bar{x} + \dot{X}dz)^2 + (d\bar{y} + \dot{Y}dz)^2 + w^2 dz^2 = \\ = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + (w^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2) dz^2 + 2\dot{X}d\bar{x}dz + 2\dot{Y}d\bar{y}dz \quad (17)$$

с метрическим тензором g_{ik}

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1, \quad g_{33} = w^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2, \\ g_{12} = 0, \quad g_{13} = \dot{X}, \quad g_{23} = \dot{Y}. \quad (18)$$

Величины \dot{X}_1 , \dot{Y}_1 описывают скорость перемещения начала координат системы \bar{x}_1 , \bar{y}_1 .

Контравариантные компоненты и квадраты скорости на оси пучка V_l^2 и начала координат V_c^2 системы \bar{x}_1 , \bar{y}_1 определены формулами

$$v^i = \{0, 0, 1\}, \quad V_l^2 = g_{ik} v^i v^k = w^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2; \\ V_c^2 = w^2 + \dot{X}_1^2 + \dot{Y}_1^2. \quad (19)$$

В моделях [8–13] пучок имеет эллиптическое сечение в плоскости (s, q) , нормальной к оси. Выше говорилось об эллиптическом контуре в плоскостях $z = \text{const}$. Это наиболее удобный способ интерпретации решения, хотя в силу линейного преобразования между плоскостями $z = \text{const}$ и (s, q) контур остается эллиптическим и в нормальном сечении.

На рис. 3 представлены функции J_1 , J_2 , X , Y , X_1 , Y_1 , z от τ , функции w , V_c , V_l от z (рис. 4) для случая

$$a = 2.25, \quad b = -1, \quad H_z = 2, \quad H_x = H_y = 1,$$

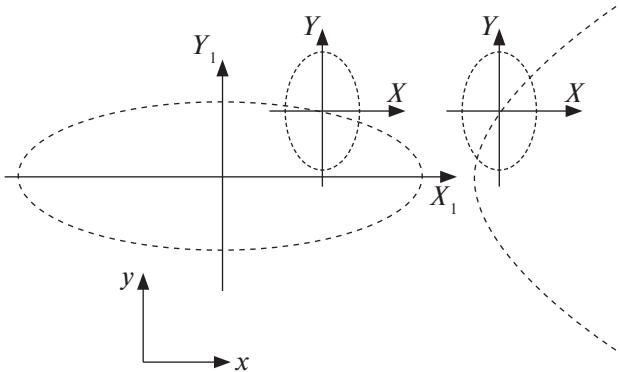


Рис. 2. Сечение эллиптической трубы тока и кривая, по которой перемещается центр эллипса.

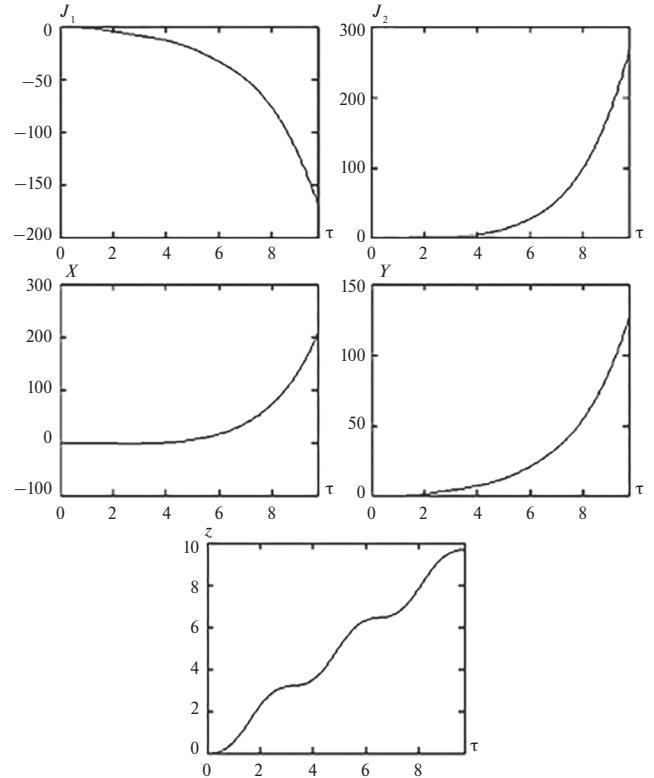


Рис. 3. Параметры потока для решения (20).

$$\omega^2 = -0.25, \quad \Omega^2 = 2, \\ \chi^2 = 2.25, \quad \lambda^2 = 3.75, \quad \Lambda = 0.063, \\ \Delta = 3.579, \quad J_{10} = J_{20} = 0, \quad (20) \\ a_1 = -1.181, \quad a_2 = -3.543, \quad \mu = 0.5, \\ v = 1.941, \quad \gamma v = 0.885.$$

Отношение полуосей эллипса составляет 1.5, z -компоненты скорости в приводимых примерах периодически проходит через минимум 0.015 исходной величины. Формулы для параметров потока с вычисленными коэффициентами принимают вид

$$J_1 = -1.18e^+ - 3.54e^- + (0.49 \sin t - 0.28 \cos t - 2.25\tau + 5), \\ J_2 = 2.36e^+ - 7.09e^- + (-0.31 \sin t - 0.28 \cos t - 4\tau + 5), \\ X = 1.89e^+ - 5.67e^- + (0.11 \sin t - 0.22 \cos t - 4\tau + 4), \\ Y = 0.47e^+ - 1.42e^- + (-0.03 \sin t + 0.22 \cos t + \tau - 4), \quad (21)$$

$$\dot{X}_1 = 0.43 \sin t + 0.22 \cos t - 4,$$

$$\dot{Y}_1 = -0.43 \sin t - 0.06 \cos t + 1,$$

$$e^+ \equiv \exp(\mu\tau), \quad e^- \equiv \exp(-\mu\tau), \quad t = v\tau.$$

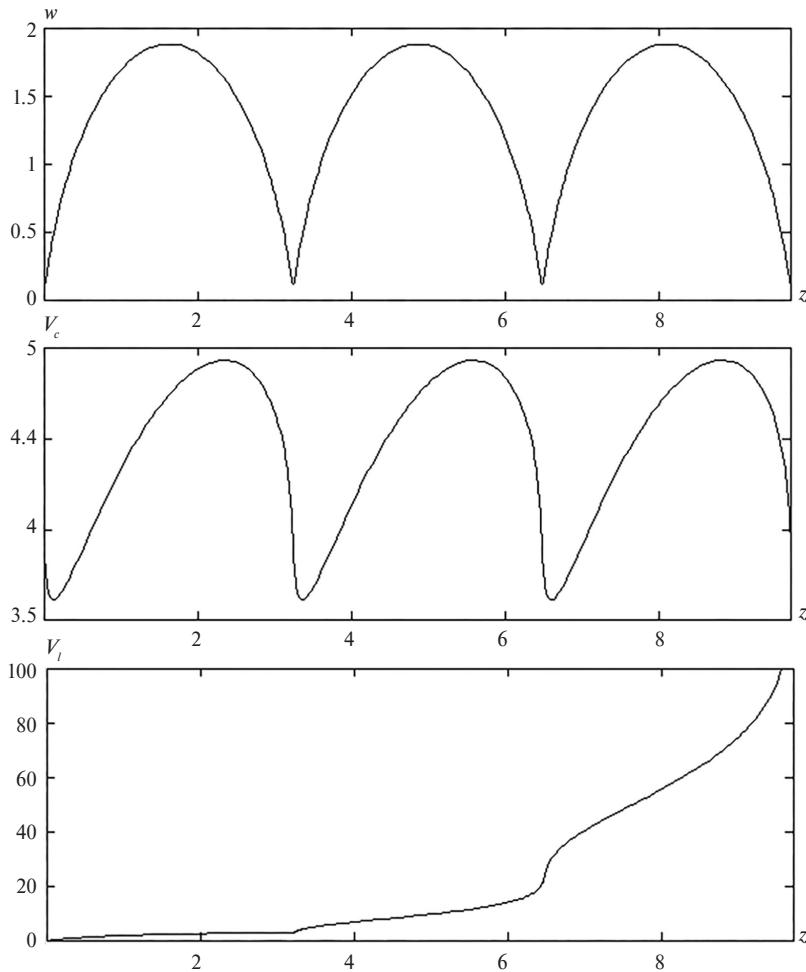


Рис. 4. Функции w , V_c , V_l для решения (20).

Наличие экспонент e^+ приводит к быстрому изменению функций J_1, J_2, X, Y с подавлением осцилляционных слагаемых, представленных функциями X_1, Y_1 . Изменение z -компоненты скорости $w(z)$ и скорости $V_c(z)$ центра системы \bar{x}_1, \bar{y}_1 носит периодический характер, в то время как скорость на оси пучка $V_l(z)$ после относительно медленного изменения при $z < 5$ быстро растет. Компоненты магнитного поля имеют порядок единицы при невысоких значениях показателя экспоненты $\mu = 0.5$ и частоты $\nu \sim 2$.

Для пучков с отношением полуосей 10 умеренный показатель экспоненты удается сохранить в двух случаях

$$\begin{aligned}
 a &= 100, \quad b = -1, \quad H_z = 99.999, \quad H_x = H_y = 1, \\
 \omega^2 &= -0.099, \quad \Omega^2 = 9900, \\
 \chi^2 &= 100, \quad \lambda^2 = 9902, \quad \Lambda = 881.2, \\
 \Delta &= 2.451 \cdot 10^7, \quad J_{10} = J_{20} = 0, \\
 a_1 &= -5.04, \quad a_2 = -5.07, \quad \mu = 0.315,
 \end{aligned}$$

$$\nu = 99.5, \quad \gamma\nu = 0.885; \quad (22)$$

$$a = 100, \quad b = -1, \quad H_z = 1.001, \quad H_x = H_y = 1,$$

$$\omega^2 = -0.099, \quad \Omega^2 = -98.899,$$

$$\chi^2 = 100, \quad \lambda^2 = -96.998, \quad \Lambda = 9890,$$

$$\Delta = 12240, \quad J_{10} = J_{20} = 0,$$

$$a_1 = 1.582 \cdot 10^5, \quad a_2 = -1.592 \cdot 10^5, \quad \mu = 0.315,$$

$$\nu = 7.88, \quad \gamma\nu = 0.885.$$

В первом из них резко возрастают частота $\nu = 99.5$, среднее значение $V_c \sim 1000$ при столь же резком уменьшении амплитуды до 0.001 и изменении вида скорости V_l (рис. 5). Во втором случае существенно более слабого H_z -поля частота возросла в четыре раза, среднее значение V_c , как и в первом случае, ~ 1000 при амплитуде ~ 1 и качественном подобии скорости V_l с рис. 4 при существенно более быстром росте (рис. 6).

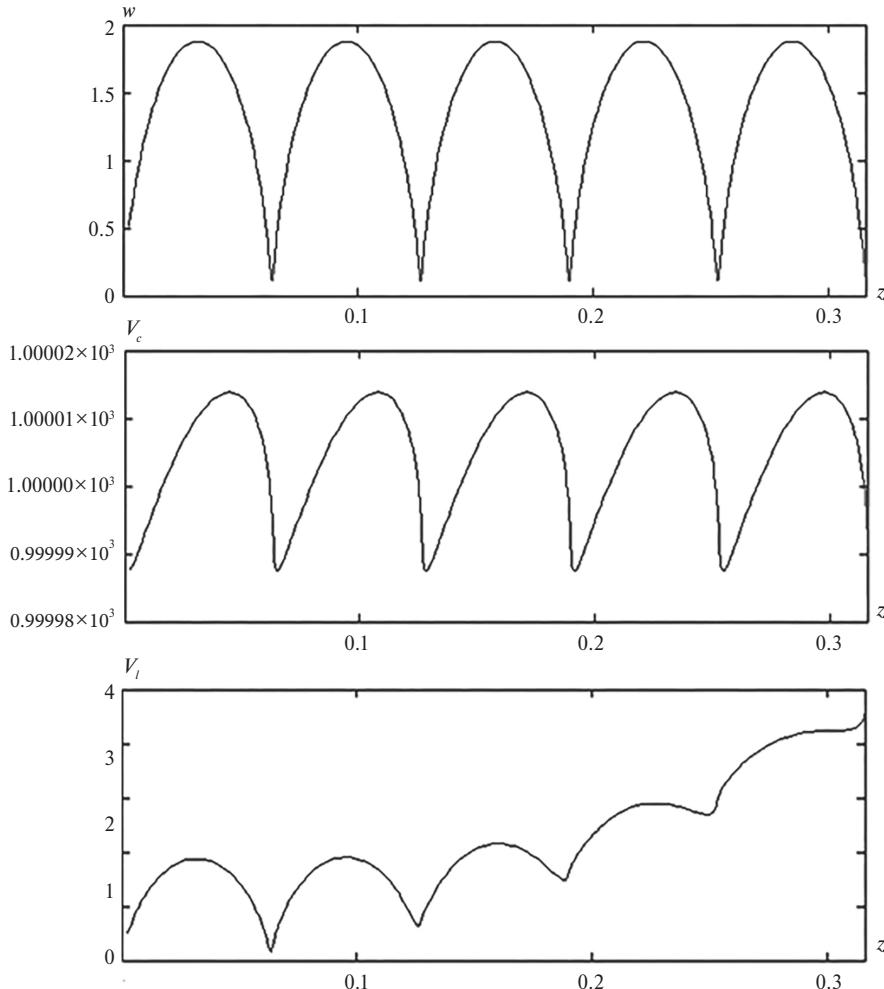


Рис. 5. Функции w , V_c , V_l для решения (22).

При $H_z + b \ll 1$ и разных отношениях полуосей эллипса скорости V_c , V_l ведут себя похожим образом. Большее разнообразие соответствует варианту $a - H_z \ll 1$ (рис. 5).

3. РЕШЕНИЕ ВТОРОГО ТИПА

Решение второго типа характеризуется неравенствами

$$\Delta > 0, \quad -\frac{1}{4}\lambda^4 < \Lambda < 0, \quad \lambda^2 > 0, \quad (23)$$

при выполнении которых существуют две пары чисто мнимых корней

$$-\mu_1^2 = \mu^2 > 0, \quad -\mu_2^2 = v^2 > 0. \quad (24)$$

Рассмотрим решение, которое описывает инжекцию с ненулевой скоростью и нулевым полем E_0 с плоскости $z = 0$ при выполнении соотношения (k – целое число, кратные корни)

$$v = k\mu, \quad v^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 + \sqrt{\Delta}, \quad \mu^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 - \sqrt{\Delta}. \quad (25)$$

Функции z , w для него определены формулами

$$z = \beta \left(\frac{1}{\mu} \sin \mu \tau - \frac{1}{v} \sin v \tau \right) + \tau, \\ w = \beta (\cos \mu \tau - \cos v \tau) + 1. \quad (26)$$

При $\beta = 1$ и изменении знака у второго слагаемого в скобках решение (26) описывает регулярную последовательность виртуальных эмиттеров с особенностью типа ρ -режима в z -направлении.

На плоскости ξ , η требованию (25) удовлетворяют точки параболы, которые должны попасть в сектор $\xi \geq \pm \eta$, в то время как сама кривая определена развернутым равенством (25)

$$\xi^2 + \left\{ 2(\Omega^2 + \omega^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 + 1}{k} \right)^2 \left[(b - a)H_z + a^2 + b^2 \right] \right\} \xi + \\ + (\Omega^2 + \omega^2)^2 - \left(\frac{k^2 + 1}{k} \right)^2 \omega^2 \Omega^2 + \quad (27)$$

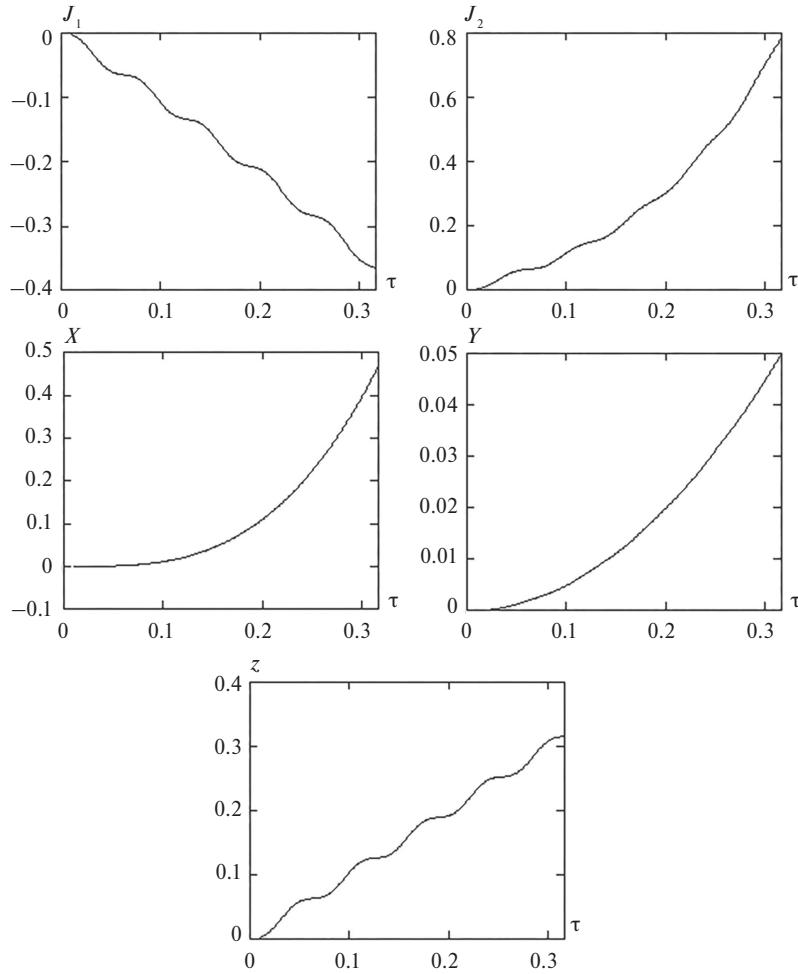


Рис. 6. Параметры потока для решения (22).

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 + 1}{k} \right)^2 (a + b) (H_z - a + b) \eta = 0.$$

Уравнение (27) может приводить к значениям ξ, η , не удовлетворяющим условию (25).

Для случая, когда ось эллипса перемещается по поверхности эллиптического цилиндра ($\omega^2 > 0$, рис. 2), функции J_1, J_2 определены соотношениями

$$\begin{aligned} J_1 &= a_1 \cos \omega \tau + a_2 \sin \omega \tau + J_{11}, \\ J_2 &= \frac{\omega}{H_z - a} (-a_1 \sin \omega \tau + a_2 \cos \omega \tau) + J_{2,1}; \\ J_{11} &= \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} \frac{\beta}{\mu} [\mu^2 - a(H_z - a)] H_y \sin \mu \tau + \\ &+ \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} (H_z - a + b) \beta H_x \cos \mu \tau + \\ &+ \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} \frac{\beta}{\nu} [-\nu^2 + a(H_z - a)] H_y \sin \nu \tau - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} (H_z - a + b) \beta H_x \cos \nu \tau - \\ &- \frac{a}{H_z - a} H_y \tau + \frac{H_z - a + b}{\omega^2} H_x, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} J_{21} &= -\frac{1}{\omega^2 - \mu^2} \frac{\beta}{\mu} [\mu^2 + b(H_z + b)] H_x \sin \mu \tau + \\ &+ \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} (H_z - a + b) \beta H_y \cos \mu \tau + \\ &+ \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} \frac{\beta}{\nu} [\nu^2 + b(H_z + b)] H_x \sin \nu \tau - \\ &- \frac{1}{\omega^2 - \nu^2} (H_z - a + b) \beta H_y \cos \nu \tau - \\ &- \frac{b}{H_z - a} H_x \tau + \frac{H_z - a + b}{\omega^2} H_y. \end{aligned}$$

Постоянные a_1, a_2 описываются формулами

$$a_1 = J_{10} - (H_z - a + b) \left[-\frac{v^2 - \mu^2}{(\omega^2 - \mu^2)(\omega^2 - v^2)} \beta + \frac{1}{\omega^2} \right] H_x, \\ a_2 = \frac{H_z - a}{\omega} \left\{ J_{20} - (H_z - a + b) \times \right. \\ \left. \times \left[-\frac{v^2 - \mu^2}{(\omega^2 - \mu^2)(\omega^2 - v^2)} \beta + \frac{1}{\omega^2} \right] H_y \right\}. \quad (29)$$

Для функций X, Y получаем

$$X = \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} \frac{H_z}{H_z - a} (-a_1 \sin \omega \tau + a_2 \cos \omega \tau) + X_1, \quad (30)$$

$$Y = -\frac{H_z}{\chi^2 - \omega^2} (a_1 \cos \omega \tau + a_2 \sin \omega \tau) + Y_1;$$

$$X_1 = \frac{H_z + b}{\mu(\omega^2 - \mu^2)} \beta H_x \sin \mu \tau - \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} \beta H_y \cos \mu \tau -$$

$$-\frac{H_z + b}{v(\omega^2 - v^2)} \beta H_x \sin v \tau + \frac{1}{\omega^2 - v^2} \beta H_y \cos v \tau +$$

$$+ \frac{1}{H_z - a} H_x \tau - \frac{1}{\omega^2} H_y,$$

$$Y_1 = \frac{H_z - a}{\mu(\omega^2 - \mu^2)} \beta H_y \sin \mu \tau + \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} \beta H_x \cos \mu \tau - \\ - \frac{H_z - a}{v(\omega^2 - v^2)} \beta H_y \sin v \tau - \frac{1}{\omega^2 - v^2} \beta H_x \cos v \tau - \\ - \frac{1}{H_z + b} H_y \tau + \frac{1}{\omega^2} H_x.$$

Приведем результаты рассмотрения трех решений с корнями разной кратности. Первое из них соответствует эллипсу с отношением полуосей $\sqrt{2}$ и примерно равными компонентами магнитного поля (~ 4) при кратности $k = 4$ (рис. 7, 8)

$$a = 1, \quad b = -2, \quad H_z = 4,$$

$$H_x = H_y = 4.95, \quad \omega^2 = 6, \quad \Omega^2 = 8,$$

$$\chi^2 = 2, \quad \lambda^2 = 62.93, \quad \Lambda = -219.26,$$

$$\Delta = 770.85, \quad J_{10} = J_{20} = 0,$$

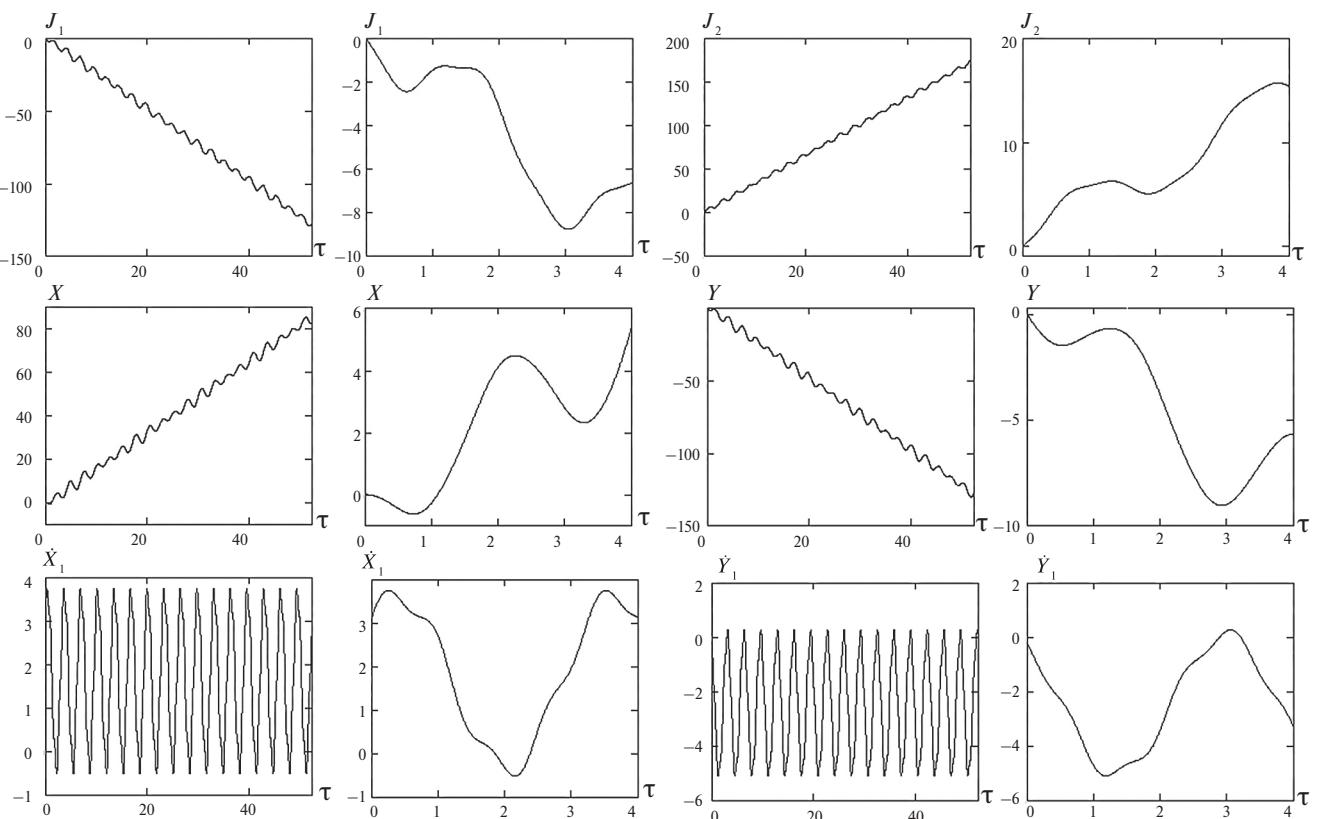
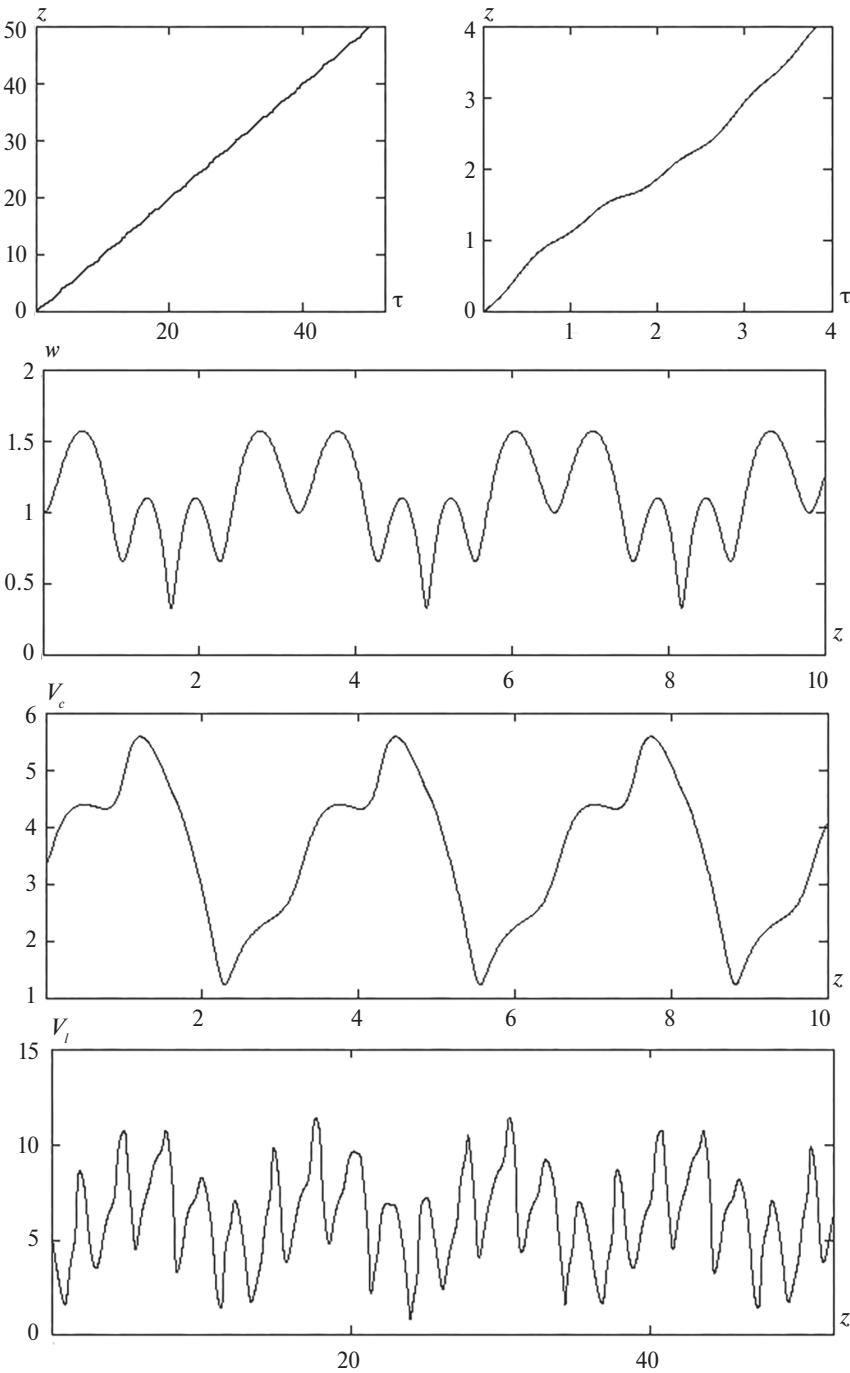


Рис. 7. Параметры потока для решения (31).

Рис. 8. Функции w , V_c , V_l для решения (31).

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -1.573, \quad a_2 = -1.926, & J_2 &= 1.28S_\omega - 1.57C_\omega + (0.11S_\mu + 0.72C_\mu - \\
 \mu &= 1.924, \quad v = 7.696, \quad \beta = 0.333; & & - 0.22S_v + 0.031C_v + 3.30\tau + 0.82), \\
 J_1 &= -1.93S_\omega - 1.57C_\omega + (0.26S_\mu + 0.72C_\mu + & X &= -1.28S_\omega + 1.57C_\omega + (0.75S_\mu - 0.72C_\mu + \\
 & + 0.23S_v + 0.031C_v - 2.47\tau + 0.82), & & + 0.008S_v - 0.031C_v + 1.65\tau - 0.82), \\
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$Y = 3.85S_{\omega} - 4.72C_{\omega} + (1.12S_{\mu} + 0.72C_{\mu} + 0.012S_v + 0.031C_v - 2.47\tau + 0.82), \quad v = 18.794, \quad \beta = 0.333; \quad (32)$$

$$\dot{X}_1 = 1.38S_{\mu} + 1.44C_{\mu} + 0.24S_v + 0.062C_v + 1.65,$$

$$\dot{Y}_1 = -1.38S_{\mu} + 2.15C_{\mu} - 0.24S_v + 0.093C_v - 2.47;$$

$$S_{\omega} \equiv \sin \omega \tau, \quad C_{\omega} \equiv \cos \omega \tau.$$

Второе для того же эллипса имеет втрое большие компоненты H_x, H_y при кратности $k = 10$ (рис. 9, 10)

$$a = 1, \quad b = -2, \quad H_z = 4, \quad H_x = H_y = 13.09,$$

$$\omega^2 = 6, \quad \Omega^2 = 8,$$

$$\chi^2 = 2, \quad \lambda^2 = 356.75, \quad \Lambda = -1248,$$

$$\Delta = 30570, \quad J_{10} = J_{20} = 0,$$

$$a_1 = -3.963, \quad a_2 = -4.853, \quad \mu = 1.879,$$

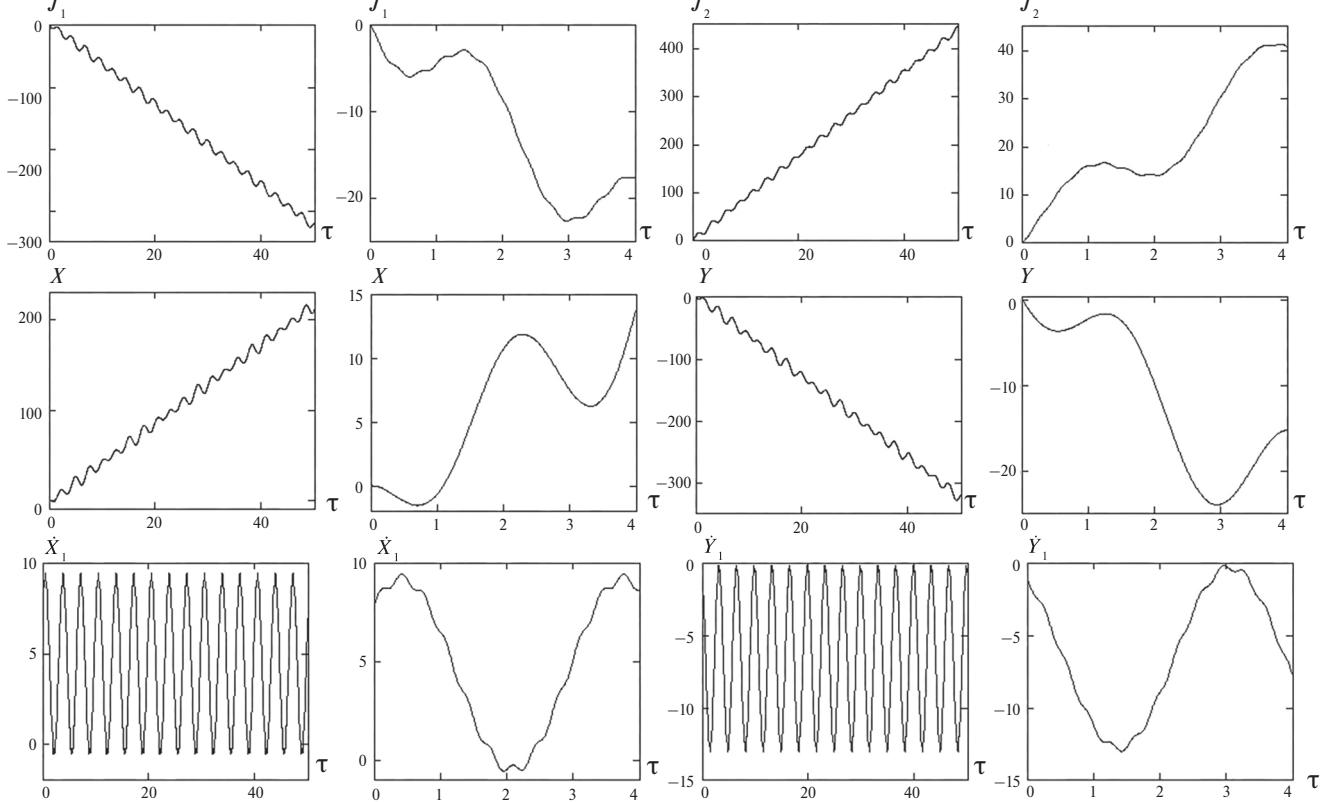
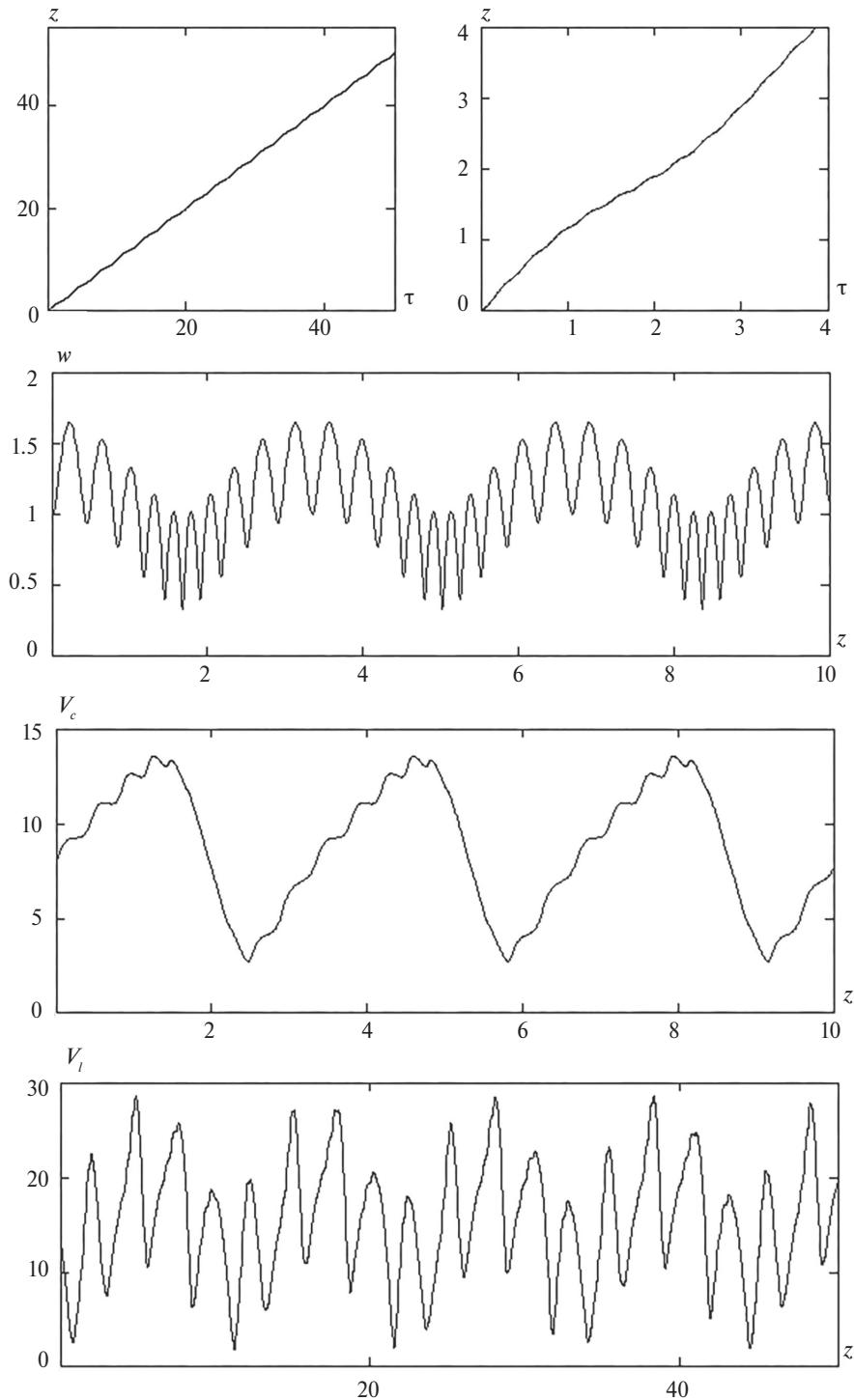


Рис. 9. Параметры потока для решения (32).

Рис. 10. Функции w , V_c , V_l для решения (32).

Увеличение поперечных компонент магнитного поля привело к существенному росту амплитуд и частоты изменения параметров потока.

Третье решение для эллипса с отношением полуосей $\sqrt{10}$ и различием на два порядка H_z -поля

и компонент H_x , H_y при кратности $k = 10$ (рис. 11, 12) описывается формулами

$$a = 10, \quad b = -1, \quad H_z = 10.1, \quad H_x = H_y = 0.117, \\ \omega^2 = 0.91, \quad \Omega^2 = 91.1,$$

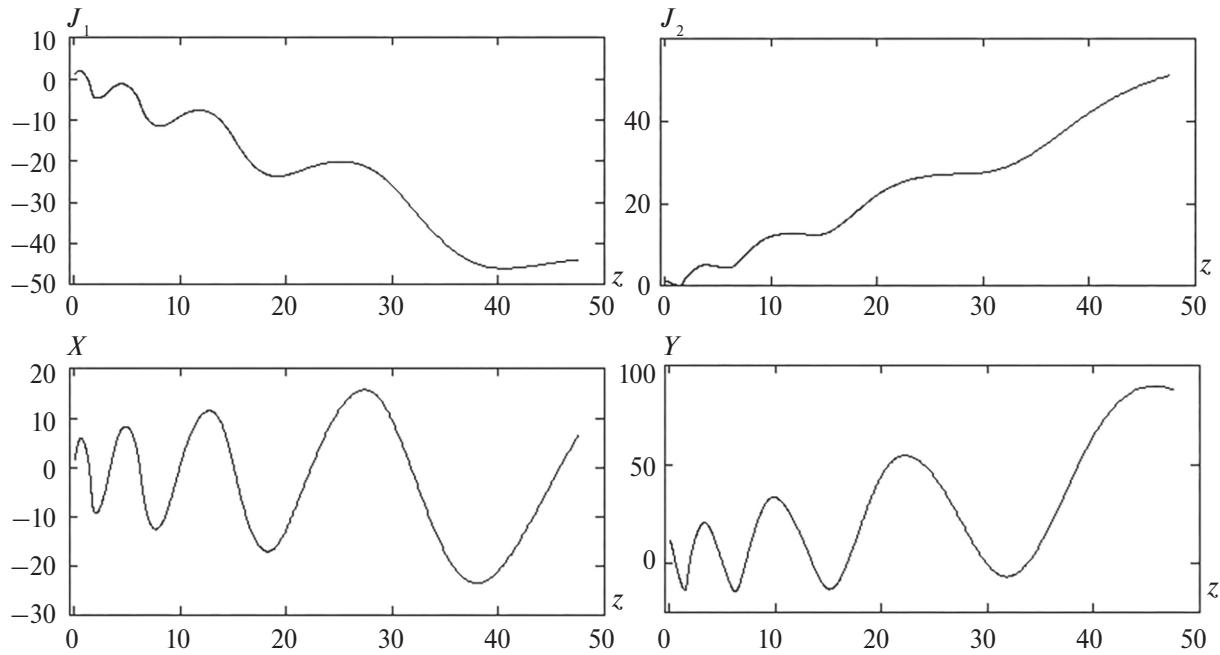
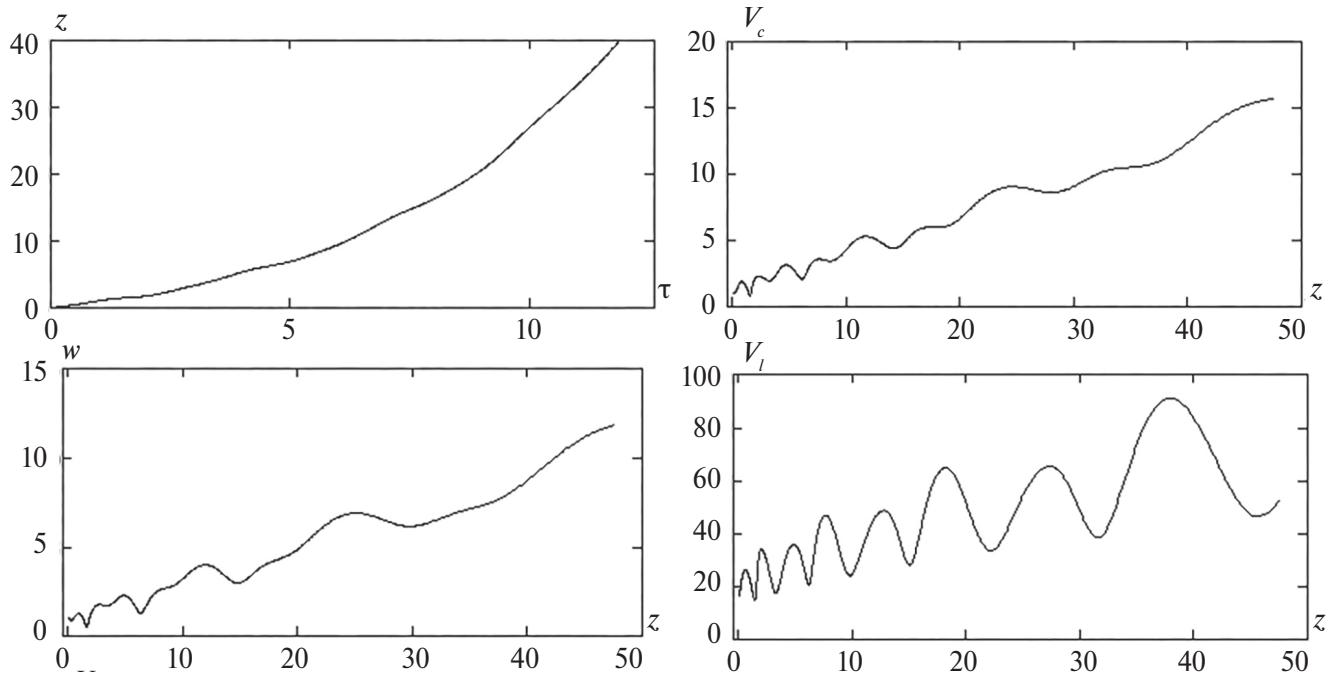


Рис. 11. Параметры потока для решения (48).

Рис. 12. Функции w , V_c , V_l для решения (48).

$$\chi^2 = 10, \quad \lambda^2 = 92.04, \quad \Lambda = -83.04,$$

$$\nu = 9.546, \quad \beta = 0.333;$$

$$\Delta = 2035, \quad J_{10} = J_{20} = 0,$$

$$J_1 = -2.91S_\omega - 27.75C_\omega + (2.88S_\mu + 27.87C_\mu +$$

$$a_1 = -27.754, \quad a_2 = -2.909, \quad \mu = 0.955,$$

$$+ 0.004S_\nu - 0.0004C_\nu - 0.13\tau - 0.12), \quad (33)$$

$$J_2 = 264.75S_\omega - 27.75C_\omega + (-265.64S_\mu + 27.87C_\mu - 0.0037S_v - 0.0004C_v + 1.17\tau - 0.12),$$

$$X = 294.17S_\omega - 30.84C_\omega + (-295.20S_\mu + 30.97C_\mu + 0.0004S_v - 0.0004C_v + 1.17\tau - 0.13),$$

$$Y = 30.84C_\omega + 3.23S_\omega + (-30.97C_\mu - 3.24S_\mu + 0.000004S_v + 0.0004C_v - 0.013\tau + 0.13),$$

$$\dot{X}_1 = -29.56S_\mu - 281.80C_\mu + 0.004S_v + 0.004C_v + 1.17,$$

$$\dot{Y}_1 = 29.56S_\mu - 3.10C_\mu - 0.004S_v + 0.000004C_v - 0.013.$$

Хотя скорости V_c , V_l не имеют возрастающих функций τ и по этой причине изменяются в ограниченной полосе, однако большие значения коэффициентов в (33) делают эту полосу достаточно широкой, что позволяет продольной скорости V_l увеличиваться в ее пределах. Вклад частоты v оказывается незначительным для большей части параметров потока, поэтому их изменение определяется соотношением колебаний с частотами μ , $\omega \sim 1$ и большими амплитудами этих гармоник.

Во всех случаях частицы движутся по эллипсу в отрицательном направлении, изменение которого ($a = -1$, $b = 2$ для первого случая, например) приводит к несуществованию режима с кратными корнями. Отыскание режимов подобного рода не сводится к произвольному заданию набора констант, определяющих решение, но требует заметных усилий для выполнения неравенств (23) и условия (25).

4. Z-ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Электронный поток с нулевой z -компонентой ротора обобщенного импульса

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = H_z \quad (34)$$

удобно называть Z -потенциальным. Параметры подобного течения определены выражениями

$$u = ax + by + J_1(z), \quad v = cx + ay + J_2(z), \quad w = w(z),$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}(a^2 + c^2)x^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)y^2 + 2a\Omega xy + (cH_x - aH_y)xz + (aH_x - bH_y)yz + \Phi(z), \\ \Phi &= \frac{1}{2}w^2 - \int(H_yJ_1 - H_xJ_2)dz, \\ \rho &= \rho_0 + \Phi'', \quad \rho_0 = 2(a^2 + \Omega^2) + \frac{1}{2}H_z^2, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -(cH_x - aH_y)xz - (aH_x - bH_y)yz + (aJ_1 + cJ_2)x + (bJ_1 + aJ_2)y + \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2) + \int(H_yJ_1 - H_xJ_2)dz; \\ b &= \Omega + \frac{1}{2}H_z, \quad c = \Omega - \frac{1}{2}H_z, \quad -bc > 0, \\ \frac{1}{2}H_z &> |\Omega|; \quad a, \Omega = \text{const}. \end{aligned}$$

Уравнения пучка сводятся к соотношениям для второй производной скорости w по оси z и комплексов K_1 , K_2 :

$$\ddot{w} + \rho_0 w = C \exp(-2a\tau) - H_x \dot{J}_2 + H_y \dot{J}_1, \quad C = \text{const};$$

$$\dot{K}_1 + aK_1 + cK_2 = 0, \quad \dot{K}_2 + bK_1 + aK_2 = 0, \quad (36)$$

$$K_1 = J_1 + H_y z, \quad K_2 = J_2 - H_x z.$$

Для функций J_1 , J_2 и преобразованного с учетом их вида уравнения для w получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= -H_y z + \exp(-a\tau)(a_1 \cos \chi \tau + a_2 \sin \chi \tau), \\ J_2 &= H_x z + \frac{\chi}{c} \exp(-a\tau)(a_1 \sin \chi \tau - a_2 \cos \chi \tau), \quad \chi^2 = -bc. \\ \ddot{w} + v^2 w &= C \exp(-2a\tau) + \exp(-a\tau)(W_c \cos \chi \tau + W_s \sin \chi \tau), \\ W_c &= (-aa_1 + \chi a_2)H_y - \frac{\chi}{c}(aa_2 + \chi a_1)H_x, \\ W_s &= -(aa_2 + \chi a_1)H_y - \frac{\chi}{c}(-aa_1 + \chi a_2)H_x, \\ v^2 &= \rho_0 + H_x^2 + H_y^2 > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Постоянные a_1 , a_2 определим через значения функций J_1 , J_2 в плоскости инжекции $z = 0$:

$$J_{10} = a_1, \quad J_{20} = -\frac{\chi}{c}a_2. \quad (38)$$

В отличие от Z -соленоидальных течений, где требование $J_{10} = J_{20} = 0$ не устраниет сложных зависимостей функций от z , здесь эти равенства делают компоненты скорости u , v линейными функциями декартовых координат.

Решение уравнения для w и выражение для z имеют вид

$$\begin{aligned} w &= C_1 \cos v\tau + C_2 \sin v\tau + C_e \exp(-2a\tau) + \exp(-a\tau)(C_{ce} \cos \chi \tau + C_{se} \sin \chi \tau), \\ z &= \frac{C_1}{v} \sin v\tau + \frac{C_2}{v} (1 - \cos v\tau) + \frac{C_e}{2a} [1 - \exp(-2a\tau)] + \end{aligned}$$

$$+Z_{ce}\left[1-\exp(-a\tau)\cos\chi\tau\right]+Z_{se}\exp(-a\tau)\sin\chi\tau; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} Z_{ce} &= \frac{1}{a^2 + \chi^2}(aC_{ce} + \chi C_{se}), \\ Z_{se} &= \frac{1}{a^2 + \chi^2}(\chi C_{ce} - aC_{se}); \\ C_e &= \frac{C}{4a^2 + v^2}, \quad \delta = (a^2 - \chi^2 + v^2)^2 + 4a^2\chi^2, \\ C_{ce} &= \frac{1}{\delta}\left[(a^2 - \chi^2 + v^2)W_c + 2a\chi W_s\right], \\ C_{se} &= \frac{1}{\delta}\left[(a^2 - \chi^2 + v^2)W_s - 2a\chi W_c\right]. \end{aligned}$$

Постоянные C , C_1 , C_2 определим через выражения для скорости w , электрического поля $E = \Phi'$ и плотности тока $J = \rho w$ на оси пучка в плоскости инжекции $z = \tau = 0$:

$$\begin{aligned} C_1 &= w_0 - C_e - C_{ce}, \\ \dot{w}_0 &= vC_2 - 2aC_e - aC_{ce} + \chi C_{se} = \\ &= E_0 + a_1 H_y + \frac{\chi}{c} a_2 H_x, \\ \rho w|_0 &= \rho_0 w_0 + (\ddot{w} - H_y J_1 + H_x J_2)|_0 = J_0 = C. \end{aligned} \quad (40)$$

С учетом соотношений (39), (40) перепишем выражения для z , w следующим образом:

$$\begin{aligned} z &= Z_s \sin v\tau + Z_c(1 - \cos v\tau) + Z_e\left[1 - \exp(-2a\tau)\right] + \\ &+ Z_{ce}\left[1 - \exp(-a\tau)\cos\chi\tau\right] + Z_{se}\exp(-a\tau)\sin\chi\tau, \\ w &= vZ_s \cos v\tau + vZ_c \sin v\tau + 2a\exp(-2a\tau) + \\ &+ \exp(-a\tau)(C_{ce} \cos\chi\tau + C_{se} \sin\chi\tau); \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} Z_s &= \frac{1}{v}(w_0 - C_e - C_{ce}), \quad C_e = \frac{J_0}{4a^2 + v^2}, \quad Z_e = \frac{C_e}{2a}, \\ Z_c &= \frac{1}{v}\left(E_0 + a_1 H_y + \frac{\chi}{c} a_2 H_x + 2aC_e + aC_{ce} - \chi C_{se}\right). \end{aligned}$$

Выражения для компонент скорости u , v из (35) позволяют сформулировать уравнения для x , y :

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2a\dot{x} + (a^2 + \chi^2)x &= J_1 - aJ_1 + bJ_2, \\ y &= \frac{1}{b}(\dot{x} - ax - J_1). \end{aligned} \quad (42)$$

Решение уравнений (42) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \exp(a\tau)(\alpha_1 \cos\chi\tau + \alpha_2 \sin\chi\tau) + X, \\ X &= \exp(-a\tau)(X_{ce} \cos\chi\tau + X_{se} \sin\chi\tau) + X_1, \end{aligned}$$

$$X_1 = X_c \cos v\tau + X_s \sin v\tau + X_e \exp(-2a\tau) + X_0;$$

$$y = \frac{\chi}{b} \exp(a\tau)(-\alpha_1 \sin\chi\tau + \alpha_2 \cos\chi\tau) + Y, \quad (43)$$

$$Y = \exp(-a\tau)(Y_{ce} \cos\chi\tau + Y_{se} \sin\chi\tau) + Y_1,$$

$$Y_1 = Y_c \cos v\tau + Y_s \sin v\tau + Y_e \exp(-2a\tau) + Y_0.$$

Коэффициенты в формулах для X в (43) описываются выражениями

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{1}{\delta}\left\{v\left[(a^2 - \chi^2 + v^2)H_y + 2abH_x\right]Z_c + \right. \\ &+ \left.\left[(a^2 + \chi^2 + v^2)aH_y + (a^2 + \chi^2 - v^2)bH_x\right]Z_s\right\}, \\ X_c &= \frac{1}{\delta}\left\{-\left[(a^2 + \chi^2 + v^2)aH_y + \right. \right. \\ &+ \left.\left.(a^2 + \chi^2 - v^2)bH_x\right]Z_c + \right. \\ &+ \left.v\left[(a^2 - \chi^2 + v^2)H_y + 2abH_x\right]Z_s\right\}, \\ X_{ce} &= \frac{1}{4a(a^2 + \chi^2)}\left[(-aF_1 + \chi F_2) - \right. \\ &- \left.(2a^2 + bH_z)a_1 - \frac{2a\chi\Omega}{c}a_2\right], \\ X_{se} &= \frac{1}{4a(a^2 + \chi^2)}\left[(\chi F_1 + aF_2) + \right. \\ &+ \left.\frac{2a\chi\Omega}{c}a_1 - (2a^2 + bH_z)a_2\right], \\ F_1 &= (2aH_y + bH_x)Z_{ce} + \chi H_y Z_{se}, \\ F_2 &= (2aH_y + bH_x)Z_{se} - \chi H_y Z_{ce}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$X_e = -\frac{3aH_y + bH_x}{9a^2 + \chi^2}Z_e,$$

$$X_0 = \frac{aH_y + bH_x}{a^2 + \chi^2}(Z_c + Z_e + Z_{ce}).$$

Для функции Y из (43) получаем

$$\begin{aligned} Y_c &= \frac{1}{b}(-H_y Z_c - aX_c + vX_s), \\ Y_s &= \frac{1}{b}(H_y Z_s - vX_c - aX_s), \\ Y_e &= -\frac{1}{b}(H_y Z_e + 3aX_e), \\ Y_0 &= \frac{1}{b}\left[H_y(Z_c + Z_e + Z_{ce}) - aX_0\right], \end{aligned} \quad (45)$$

$$Y_{ce} = \frac{1}{b}(-H_y Z_{ce} - 2a X_{ce} + \chi X_{se} - a_1),$$

$$Y_{se} = \frac{1}{b}(H_y Z_{se} - \chi X_{ce} - 2a X_{se} - a_2).$$

Траектории частиц в проекции на плоскости $z = \text{const}$ в координатах $\bar{x} = x - X$, $\bar{y} = y - Y$ имеют вид спиралей [15]. Для неограниченного по длине пучка параметр a должен быть отрицательным. Из формул (43) следует, что трубками тока в системе \bar{x}_1 , \bar{y}_1 являются поверхности, имеющие в плоскостях $z = \text{const}$ эллиптическое сечение, полуоси которого при $a < 0$ экспоненциально убывают так, что при $\tau \rightarrow \infty$ эллипс стягивается в точку

$$\bar{x}^2 + \frac{H_z / 2 + \Omega}{H_z / 2 - \Omega} \bar{y}^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \exp(2a\tau). \quad (46)$$

Ось пучка в системе $\bar{x}_1 = X - X_1$, $\bar{y}_1 = Y - Y_1$ движется по эллипсу

$$\begin{aligned} & (Y_{ce}^2 + Y_{se}^2) \bar{x}_1^2 - 2(X_{ce} Y_{ce} + X_{se} Y_{se}) \bar{x}_1 \bar{y}_1 + \\ & + (X_{ce}^2 + X_{se}^2) \bar{y}_1^2 = (X_{ce} Y_{se} - X_{se} Y_{ce})^2 \exp(-2a\tau). \end{aligned} \quad (47)$$

В отличие от рис. 2 эта кривая повернута относительно оси \bar{x}_1 на угол ϑ

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{-2(X_{ce} Y_{ce} + X_{se} Y_{se})}{Y_{ce}^2 + Y_{se}^2 - (X_{ce}^2 + X_{se}^2)}. \quad (48)$$

Выше было сказано, что при неограниченной длине пучка $a < 0$, поэтому с ростом $\tau \rightarrow \infty$ эллипс (47) экспоненциально расширяется.

На рис. 13, 14 приведены параметры потока с отношением полуосей эллипса 2, описываемого следующими формулами:

$$b = 1, \quad c = -4, \quad H_z = 5, \quad H_x = H_y = 1,$$

$$\Omega = -1.5, \quad \chi^2 = 4, \quad a = -0.1,$$

$$J_0 = 16, \quad E_0 = 0, \quad w_0 = 1, \quad J_{10} = J_{20} = 1,$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad v = 4.361;$$

$$J_1 = -z + \sqrt{e} (2S_\chi + C_\chi), \quad J_2 = z + \sqrt{e} (-0.5S_\chi + C_\chi),$$

$$\begin{aligned} X = \sqrt{e} (5.94S_\chi + 2.77C_\chi) + (-0.014S_v + \\ + 0.016C_v - 0.171e - 0.95), \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} Y = \sqrt{e} (-6.18S_\chi + 11.43C_\chi) + \\ + (-0.11S_v + 0.0004C_v + 4.15e - 4.35), \end{aligned}$$

$$e = \exp(-2a\tau).$$

Видно, что вклад осцилляционных слагаемых в функции X_1 , Y_1 (вторые круглые скобки в X , Y) оказался незначительным. Величина параметра a выбрана малой ($a = -0.1$), чтобы рост скорости был не слишком резким, в то время как значение плотности тока $J_0 = 16$ обеспечивает отсутствие виртуальных эмиттеров ($w > 0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные выше примеры потоков с эллиптическими трубками тока и пространственной осью демонстрируют значительное разнообразие закона изменения z -компоненты скорости и скорости V_l на оси пучка, как при сохранении полуосей сечения, так и при их экспоненциальном росте. Существование малых характерных размеров, на которых меняются функции w , V_l , позволяет говорить о разномасштабных эталонах неограниченной длины, на которых может быть проверена адекватность численных 3D пакетов траекторного анализа.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirstein P.T. // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
2. Kent G. // Communic. Electr. 1960. V. 79. № 48. P. 144.
3. Pöschl K., Veith W. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 3. P. 1013.
4. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1967. № 2. С. 127.
5. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1967. № 4. С. 3.
6. Сыровой В.А. // Прикл. матем. и механика. 1970. Т. 34. № 1. С. 4.
7. Пегов С.А., Сыровой В.А. // РЭ. 1974. Т. 19. № 10. С. 2157.
8. Пензяков В.В., Олейников В.И. // РЭ. 1975. Т. 20. № 5. С. 1049.
9. Олейников В.И. // Новые методы расчета электронно-оптических систем. М.: Наука. 1983. С. 40.
10. Сыровой В.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 999.
11. Сыровой В.А. // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 111.
12. Сыровой В.А. // РЭ. 2016. Т. 61. № 7. С. 692.
13. Сыровой В.А. // РЭ. 2018. Т. 63. № 5. С. 472.
14. Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А. // Электронная техника. СВЧ-техника. 2018. № 1. С. 32.
15. Сыровой В.А. // РЭ. 2009. Т. 54. № 9. С. 1110.

SOLUTIONS IN ELEMENTARY FUNCTIONS FOR ELECTRON BEAMS WITH A SPATIAL AXIS AND ELLIPTIC SECTION

© 2025 T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy*

*All-Russian Electrotechnical Institute – branch of the Russian Federal Nuclear Center
All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics
named after academician E.I. Zababakhin,
Krasnokazarmennaya St., 14, Moscow, 111250 Russian Federation
E-mail: red@cplire.ru

Received January 18, 2023; revised January 18, 2023; accepted February 15, 2023

Exact solutions of a non-relativistic non-monoenergetic beam are presented for flows with an elliptical cross-section and a spatial axis in a magnetic field for various laws of change of axial velocity.

Keywords: electron beams with elliptical cross-section, Z -solenoidal flows, Z -potential flows, exact solutions