

УДК 621.391

## КЛАСС ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ С ПЛОСКОЙ ВЕРШИНОЙ И НИЗКИМИ БОКОВЫМИ ЛЕПЕСТКАМИ СПЕКТРА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СИГНАЛОВ

© 2024 г. Г. В. Зайцев\*, А. Д. Хзмалян

ПАО НПО «Алмаз» им. акад. А.А. Расплетина,  
Ленинградский просп., 80, корп. 16, Москва, 125190 Российская Федерация

\*E-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

После доработки 20.02.2024 г.

Принято к публикации 24.02.2024 г.

Рассмотрены весовые функции с плоской вершиной, используемые для повышения точности измерения амплитуды составляющих спектра при дискретном гармоническом анализе. Предложен новый класс весовых функций с плоской вершиной, обеспечивающих минимальный уровень максимального бокового лепестка спектра и простой способ вычисления значений функции. Описаны математическое представление новых весовых функций и метод оптимизации их параметров, основанные на предыдущих работах авторов. Синтезирован ряд весовых функций с плоской вершиной порядков 1...6 со скоростями спада боковых лепестков 6, 12, 18, 24, 30, 36 и 48 дБ/окт, представлены таблицы их параметров и проанализированы характеристики синтезированных функций. Предложен альтернативный способ повышения точности измерения амплитуды спектральных составляющих.

*Ключевые слова:* гармонический анализ, весовые функции с плоской вершиной, метод оптимизации, минимальные боковые лепестки

DOI: 10.31857/S0033849424090068, EDN: HRMQRB

### ВВЕДЕНИЕ

Гармонический анализ является одним из основных инструментов при решении разнообразных научно-технических задач. Необходимым этапом при расчете спектра экспериментальных данных является использование весовых функций, позволяющих смягчить неизбежные отрицательные эффекты, вызванные конечностью интервала наблюдения реальных сигналов. Весовые (оконные) функции, или просто окна, уменьшают растекание энергии спектральных составляющих по анализируемому частотному диапазону и понижают уровень боковых лепестков спектра [1, 2].

В ряде приложений необходимо измерять амплитуду гармонических составляющих с высокой точностью. Это требование является необходимым, например, в современных измерительных приборах — анализаторах спектра. Для обеспечения этого качества необходимы окна со специальными свойствами, которыми не обладает большинство известных весовых функций. Причина этого заключается в следующем.

Значения вычисленного спектра можно рассматривать как результат фильтрации сигнала с помощью гребенки фильтров [3], расставленных

равномерно по анализируемому диапазону частот и имеющих одинаковые амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Эти АЧХ фильтров совпадают со спектром окна, который, как правило, довольно быстро спадает по мере удаления от центральной частоты фильтра, т.е. точки вычисления спектра [2].

Если частота анализируемого гармонического сигнала попадает между центрами АЧХ фильтров, то выходная амплитуда меньше, чем для частоты, совпадающей с центральной частотой одного из фильтров. Это приводит к ошибке оценки амплитуды спектра сигнала. Для повышения точности этой оценки необходимо сформировать более плоскую АЧХ фильтра на интервале вблизи начала координат, размером в половину расстояния между фильтрами. Функции, имеющие такое уплощение, называются функциями с плоской вершиной. Платой за уплощение является некоторая деградация других параметров весовой функции.

Кроме описанного уплощения на весовую функцию могут накладываться дополнительные требования. В данной работе такими требованиями являются классическое условие минимизации уровня максимального бокового лепестка ее спектра и простота вычисления значений весовой функции.

Методы обеспечения указанных условий различны, поэтому рассмотрим их последовательно.

В литературе описаны следующие методы реализации плоской вершины весовой функции. В первом из них [2, 4] несколько производных спектра весовой функции на нулевой частоте устанавливаются равными нулю. При этом достигается требуемый медленный спад главного лепестка спектра весовой функции при удалении от нулевой частоты

Во втором методе [5–7] значение спектра окна на некоторой частоте в пределах половины интервала между точками вычисления спектра устанавливается равным его значению в нуле. В этом случае функция получается немонотонной и имеет максимум на интервале уплощения. Это приводит к значительно лучшему качеству уплощения. Так как целью синтеза весовых функций с плоской вершиной является высокое качество уплощения спектра, то в данной работе используется второй метод.

Для синтеза весовых функций, удовлетворяющих двум другим требованиям, в данной работе используются методы, развитые в наших предыдущих работах [8, 10–14]. Опишем коротко основные положения этих методов.

Формулировка и метод решения задачи для обеспечения второго требования – минимизации уровня максимального бокового лепестка спектра – разработаны в работе [8], где они использованы для весовых функций в виде начального отрезка ряда Фурье (далее – сумма Фурье). Функции с таким представлением являются среди классических окон наиболее простыми в вычислительном отношении и в то же время могут удовлетворять различным требованиям, вследствие чего они наиболее востребованы. Задача построения оптимальных функций с рассматриваемым свойством сформулирована в [8] как чебышевская минимаксная задача аппроксимации на заданном частотном отрезке, а решение задачи производится подходящим численным методом. Такая формулировка позволяет получить континуум оптимальных функций с широким множеством значений параметров для каждого числа слагаемых в сумме Фурье, в отличие от классических работ по весовым функциям, где для каждого числа слагаемых синтезирована только одна минимаксная функция, так что классические окна с указанными свойствами немногочисленны.

Формулировка в виде чебышевской задачи дала также возможность, используя теорию чебышевских приближений [9], получить основные свойства оптимальной функции и провести оценку близости полученного уровня максимального бокового лепестка к минимально достижимому, что позволило разработать метод верификации синтезированных функций [8]. Для известных ранее весовых функций этот вопрос не был исследован.

Использование при оптимизации отрезка частотной оси позволяет минимизировать как все боковые лепестки, так и их часть, находящуюся на отрезке, критичном для решаемой задачи.

В работе [10] разработанный метод обобщен на случай чебышевской задачи с ограничениями на коэффициенты разложения в виде линейных равенств, где он применен для синтеза весовых функций в виде суммы Фурье, имеющих высокую скорость спада боковых лепестков. Этот вариант метода синтеза используется в данной работе, при этом линейное ограничение возникает из условия обеспечения плоской вершины спектра.

Разработанный метод применим без изменений для произвольных функций, представимых в виде линейной комбинации небольшого количества базисных функций.

В работах [8, 10–14] представлены репрезентативные наборы оптимальных функций, синтезированных по описанным методам.

Третьим требованием к рассматриваемым в данной работе функциям, является простота вычисления их значений, определяемая математическим представлением функций. Вычислительная сложность весовой функции (количество операций для расчета ее значений) является важнейшим показателем качества окна для приложений реального времени, таких как, например, обработка сигнала в радиолокации, контроль качества электроэнергии, доставляемой потребителю и др.

Все весовые функции с плоской вершиной в перечисленных выше работах, как и простейшие в вычислительном отношении классические функции, имеют представление в виде суммы Фурье.

В работе [11] сложность вычисления окна была существенно – в несколько раз – снижена по сравнению с окнами в виде суммы Фурье при сохранении не меньшей свободы задания свойств окна и обеспечении более широкого набора реализуемых скоростей спада боковых лепестков, для чего там учреждены новые классы косинус-полиномиальных и полиномиальных весовых функций, а именно, предложены представления весовой функции в виде полиномов, составленных из четных или нечетных степеней, соответственно косинусоидальной функции (с полупериодом, равным длине отрезка наблюдения) и параболической функции. Эти окна обеспечивают все кратные 6 децибел на октаву (дБ/окт) скорости спада лепестков спектра без наложения каких-либо ограничений на значения коэффициентов разложений:  $V = 6(k + 1)$  дБ/окт, где произвольное неотрицательное целое число  $k$  есть младшая степень члена полинома, в отличие от окон в виде суммы Фурье, реализующих только величины  $V = 6 + 12k$  дБ/окт. Были также представлены репрезентативные каталоги оптимальных косинус-полиномиальных

и полиномиальных окон, синтезированных на основе критерия минимизации максимального бокового лепестка спектра в зависимости от ширины главного лепестка по уровню максимального бокового, с помощью разработанной численной процедуры, которая осуществляет поиск решения в пространстве дна многомерного оврага целевой функции. Эти представления весовой функции используются и в данной работе.

Недавно [12,13] классы косинус-полиномиальных и полиномиальных весовых функций были расширены на случай полиномов нецелой степени, что позволило сконструировать окна с произвольным значением асимптотической скорости спада боковых лепестков спектра  $V \geq 6$  дБ/окт. Для этих функций разработан метод синтеза оптимальных минимаксных весовых функций и представлены подробные каталоги синтезированных функций с различными уровнями максимального бокового лепестка в интервале не менее чем от  $-30$  до  $-240$  дБ и скоростями спада боковых лепестков  $V = 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30$  и  $36$  дБ/окт, а также проанализированы их характеристики. С помощью указанного выше метода верификации доказана оптимальность полученных окон по критерию минимума максимального бокового лепестка. Показано, что функции этих каталогов весьма близки к оптимальным как в непрерывном, так и в дискретном случае при числе отсчетов  $N > 64$ . Наиболее полно указанные результаты представлены в монографии [14]. Электронная версия книги, снабженная подробным комментарием на английском, имеется в открытом доступе на платформе eLibrary.ru.

Перечисленные результаты используются далее для синтеза весовых функций с указанным представлением, имеющих плоскую вершину и минимально возможный уровень максимального бокового лепестка спектра.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретный случай. Дискретная весовая функция формируется отсчетами из непрерывной функции. Непрерывная весовая функция  $w(t)$  рассматривается на интервале наблюдения  $-T/2 \leq t \leq T/2$  длительностью  $T$ , имеет нулевое

значение при  $|t| > T/2$  и является действительной четной функцией. Соответствующая дискретная весовая функция образуется  $N$  временными отсчетами  $w(t_k)$  из непрерывной функции  $w(t)$ , взятыми с шагом  $\tau = T/N$  симметрично относительно начала координат, а именно, отсчеты берутся в моменты  $t_k = -0.5(N-1)\tau + k\tau$ ,  $k=0,1,2,\dots,N-1$ . Симметричность выборок является необходимым условием для получения минимального уровня боковых лепестков и однозначно определяет дискретную функцию по заданной непрерывной. Это дает возможность при описании дискретных функций использовать непрерывные функции, что упрощает нотацию.

Спектр дискретной весовой функции  $W(f)$  определяется формулой дискретного по времени преобразования Фурье:

$$W(f) = \sum_{k=0}^{N-1} w(t_k) \exp(-j2\pi t_k f), \quad (1)$$

$$f \in [-0.5/\tau, 0.5/\tau].$$

Модуль спектра (1) периодичен по частоте  $f$  с периодом  $1/\tau$ , поэтому его достаточно анализировать на основном периоде  $f \in [-0.5/\tau, 0.5/\tau]$ . При выборе достаточно малого шага  $\tau$  отличие дискретного спектра функции  $w(t)$  от интегрального на основном периоде незначительно. В силу четности весовой функции во временной области дискретный спектр также является четным и действительным, и его достаточно анализировать только при положительных частотах на половине основного периода, т.е. для  $f \in [0, 0.5/\tau]$ .

Напомним, что величина  $1/T = 1/(N\tau)$  называется бин. В бинах половина основного периода занимает отрезок  $[0, 0.5N]$ .

Ниже рассматриваются весовые функции двух видов – полиномиальные и косинус-полиномиальные, детально описанные в монографии [14]. Представление этих функций имеет вид

$$w(t) = \sum_{k=0}^m a_k g^{\mu+2k}(t), \quad -T/2 \leq t \leq T/2, \quad (2)$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \cos(\pi t / T) & \text{для косинусполиномиальных функций,} \\ 1 - (2t / T)^2 & \text{для полиномиальных функций.} \end{cases} \quad (3)$$

В формуле (2) введены следующие обозначения:  $a_0, a_1, \dots, a_m$  – коэффициенты, подлежащие определению для придания функции  $w(t)$  необходимых

свойств (в данной статье – уплощенной вершины и низких боковых лепестков спектра);  $\mu \geq 0$  – действительный параметр, определяющий

асимптотическую скорость спада  $V$  боковых лепестков спектра функции;  $m$  – порядок функции, определяющий число членов  $m + 1$  в сумме (2) и имеющий, как правило, малое значение, составляющее несколько единиц. Для удобства изложения коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_m$  объединены далее в вектор  $\mathbf{A} = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ .

Функции (2) имеют следующие фундаментальные свойства [11, 14].

– Скорость спада боковых лепестков спектра функций равна  $V = 6(\mu + 1)$  дБ/окт; выбором параметра  $\mu \geq 0$  можно обеспечить произвольное действительное значение скорости спада боковых лепестков  $V \geq 6$  дБ/окт. Это значение не зависит от коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_m$  в отличие от функций в виде суммы Фурье, где для обеспечения желаемой скорости спада лепестков требуется соблюдать соотношения между коэффициентами в виде строгих равенств [2]. Поэтому необходимая разрядность задания коэффициентов окон (2) ниже, чем для окон в виде суммы Фурье при одинаковой скорости спада боковых лепестков.

– Вычисление значений дискретных весовых функций вида (2) требует весьма малого количества арифметических операций, особенно при целом значении параметра  $\mu$ . Это обусловлено тем, что число членов в сумме (2) невелико, основание степени всех слагаемых одинаково (так что требуется рассчитать только одну косинусоидальную функцию), а сумма может быть эффективно найдена по схеме Горнера. Количество арифметических операций при расчете значений этих функций при целом  $\mu$  в среднем в 3...5 раз меньше, чем для функций в виде суммы Фурье того же порядка, что особенно важно при расчетах в реальном масштабе времени.

– Несмотря на малый порядок функций (2), их оптимальные характеристики близки к потенциально достижимым границам.

– Функции (2) при четном значении параметра  $\mu$  формально математически эквивалентны функциям в виде суммы Фурье в том смысле, что по коэффициентам формулы (2) можно по строгим прямым формулам точно рассчитать коэффициенты суммы Фурье (и наоборот) такие, что все значения этих представлений окна совпадают. При этом с ростом скорости спада лепестков число слагаемых в сумме (2) становится все меньше числа слагаемых в сумме Фурье. Это свойство хорошо видно при сравнении конкретных примеров, приведенных в [10, табл. 4] и [11, табл. 1].

Сформулируем решаемую в данной работе задачу синтеза весовых функций вида (2) с плоской вершиной и минимумом максимального бокового лепестка.

Для обеспечения плоской вершины спектра используем второй метод, описанный во Введении. А именно, наложим на весовую функцию условие равенства абсолютных значений спектра в нуле и на некоторой частоте  $f_c$  в пределах отрезка уплощения  $\Lambda$ , равного половине интервала между точками вычисления спектра  $f_c \in \Lambda = [0, 0.5]$  бин:

$$W(\mathbf{A}, 0) = W(\mathbf{A}, f_c), \tag{4}$$

где в аргументы спектра в явном виде внесен вектор коэффициентов весовой функции.

Отклонение функции на этом отрезке от значения  $W(\mathbf{A}, 0)$  принято называть ошибкой. Максимальные по модулю положительную и отрицательную ошибки, отнесенные к величине  $|W(\mathbf{A}, 0)|$ , обозначим символами  $\delta_1$  и  $\delta_2$  соответственно (см. рис. 1в):

$$\delta_1 = \max_{f \in \Lambda} [|W(\mathbf{A}, f)| / |W(\mathbf{A}, 0)| - 1]; \quad \delta_2 = \max_{f \in \Lambda} [1 - |W(\mathbf{A}, f)| / |W(\mathbf{A}, 0)|], \tag{5}$$

а максимум их этих значений обозначим символом  $\delta$ :

$$\delta = \max(\delta_1, \delta_2). \tag{6}$$

Для минимизации этой величины при выбранном методе уплощения желательно обеспечить равенство ошибок (5):  $\delta_1 = \delta_2$ . Качество выравнивания этих параметров будем характеризовать величиной

$$\varepsilon = \frac{\delta_1 - \delta_2}{0.5(\delta_1 + \delta_2)}. \tag{7}$$

Формула (4) при подстановке в нее выражений для спектра (1) и для весовой функции (2) приводит к линейному соотношению между

коэффициентами весовой функции, что дает возможность использовать указанный во Введении метод синтеза.

Для минимизации уровня максимального бокового лепестка на заданном отрезке  $\Omega$  оси частот определим целевую функцию  $\varphi(\mathbf{A})$  как максимальное значение нормированного модуля спектра  $|W(\mathbf{A}, f) / W(\mathbf{A}, 0)|$ :

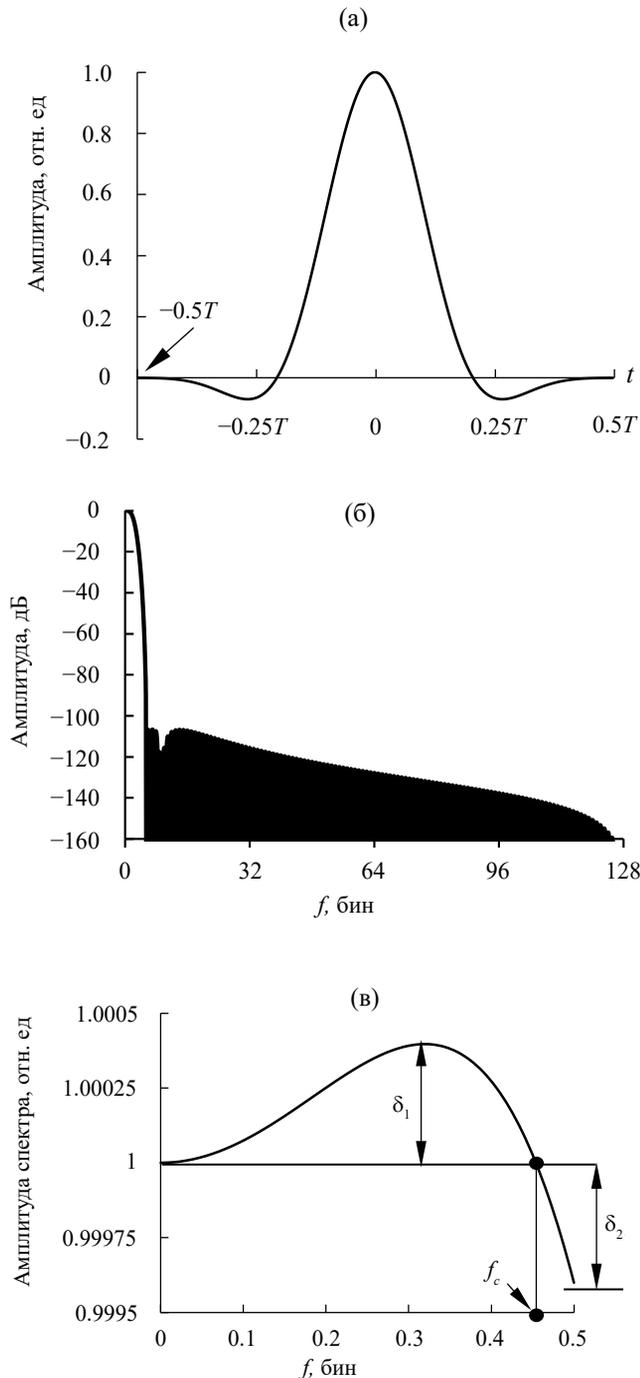
$$\varphi(\mathbf{A}) = \max_{\substack{f \in \Omega \\ W(\mathbf{A}, 0) = W(\mathbf{A}, f_c)}} |W(\mathbf{A}, f) / W(\mathbf{A}, 0)|. \tag{8}$$

В формулу (8) внесено условие уплощения (4).

Построение оптимальной минимаксной весовой функции заключается в отыскании вектора

коэффициентов  $\mathbf{A}$ , доставляющего минимум целевой функции  $\varphi(\mathbf{A})$  (8).

Метод решения поставленной минимаксной задачи с линейными ограничениями разработан и подробно описан в [14]. В данной же работе представлены результаты синтеза оптимальных весовых функций с плоской вершиной с помощью этого метода.



**Рис. 1.** Вид весовой функции с плоской вершиной: а – во временной области; б – в частотной области; в – спектр на интервале уплощения.

На рис. 1 показана характерная весовая функция с плоской вершиной, полученная по описанному методу. Для рисунка использована оптимальная косинус-полиномиальная весовая функция со следующими параметрами: порядок  $m = 4$ , отрезок оптимизации  $\Omega = [\beta, 0.5N]$ ,  $\beta = 5.5$ , скорость спада боковых лепестков  $V = 12$  дБ/окт, число выборок для рисунка выбрано равным  $N = 256$ . В результате синтеза получены следующие характеристики: ошибка на интервале уплощения  $\delta = 0.04\%$ , уровень максимального бокового лепестка  $P = -106.6$  дБ. Рис. 1а иллюстрирует вид функции во временной области. Характерной чертой функций с плоской вершиной является наличие областей с отрицательным значением функции, что является необычным для классических весовых функций [1, 2]. На рис. 1б приведен спектр функции в положительной части спектра, при отрицательных частотах спектр отображается зеркально; на рис. 1в представлен в крупном масштабе спектр на отрезке уплощения  $\Lambda = [0, 0.5]$  бин, показаны также введенные выше параметры  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $f_c$ .

## 2. СИНТЕЗИРОВАННЫЕ ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ С ПЛОСКОЙ ВЕРШИНОЙ

Описанный метод позволяет синтезировать различные классы оптимальных весовых функций, варьируя порядок функции  $m$ , скорость спада боковых лепестков  $V$ , а также границы отрезка минимизации  $\Omega$ , что позволяет подавить как все боковые лепестки, так и только их часть в пределах заданного отрезка  $\Omega$ . В рассматриваемом в данной работе случае отрезок  $\Omega$  охватывает все боковые лепестки и поэтому выражается формулой  $\Omega = [\beta, 0.5N]$  бин, где нижняя граница  $\beta$  находится в пределах главного лепестка.

Наиболее существенное различие между полиномиальными и косинус-полиномиальными весовыми функциями (2) заключается в том, что для получения одинаковых характеристик порядок оптимальной полиномиальной функции должен быть примерно в 1.5 раза выше, чем для косинус-полиномиальной. А основные характеристики этих двух семейств функций близки [14]. В связи с этим далее рассматриваются только косинус-полиномиальные функции.

Ниже представлена репрезентативная выборка синтезированных косинус-полиномиальных оптимальных весовых функций с плоской вершиной, с учетом следующих соотношений между параметрами функций, позволяющих ограничить набор приводимых в таблицах функций [14].

Параметры весовых функций, оптимальных по описанному критерию, изменяются незначительно при варьировании параметра  $N$  (исключая малые значения  $N$ , где это свойство имеет место не всегда) и тем меньше, чем больше сравниваемые значения  $N$ .

В связи с этим в табл. 1 представлены характеристики синтезированных весовых функций только для одного значения  $N = 1024$ , характерного для приложений. При таком значении  $N$  как коэффициенты, так и характеристики весовых функций практически совпадают с асимптотическими ( $N \rightarrow \infty$ ).

Так как для приводимых функций отрезок минимизации перекрывает все боковые лепестки спектра весовой функции, порядок весовой функции должен быть не меньше минимально возможного, выражаемого формулой  $m = \text{ceil}(\beta - 0.5 \mu - 1)$ , где  $\text{ceil}(x)$  – наименьшее целое, большее или равное  $x$  [14]. Увеличение порядка сверх минимального слабо улучшает характеристики функции, поэтому ниже приводятся параметры функций только для минимального порядка  $m$ .

Шаг по параметру  $\beta$  в табл. 1 составляет 0.5 бин, а порядок функций лежит в диапазоне  $m = 1..6$ .

В табл. 1, 2 и последующем обсуждении используются следующие общепринятые параметры весовых функций [1, 2]: уровень  $P$  максимального бокового лепестка; потери  $\Pi_w$  в отношении сигнал/шум за счет использования весовой функции (весовые потери); эквивалентная шумовая полоса  $L_n$ ; ширины главного лепестка  $L_3$  и  $L_6$  по уровням  $-3$  и  $-6$  дБ соответственно и полуширина  $\beta$  главного лепестка по уровню максимального бокового лепестка, являющаяся левой границей отрезка минимизации  $\Omega = [\beta, 0.5M]$  бин; максимальная относительная ошибка  $\delta$  (6) на отрезке уплощения.

Для показателя плоскостности  $\epsilon$  (7) при синтезе весовых функций задано ограничение  $\epsilon < 0.05$ . Такое значение, с одной стороны, дает возможность для рассматриваемых далее функций фиксировать частоту  $f_c$ , что упрощает синтез. С другой стороны, наложенное ограничение с практической точки зрения вполне допустимо. Для приводимых ниже функций значение частоты  $f_c$  установлено равным 0.454.

Все частотные параметры весовых функций обратно пропорциональны длительности отрезка наблюдения  $T = N \tau$ , поэтому ниже они представлены в бинах.

Коэффициенты каждой весовой функции нормированы так, что значение максимального коэффициента равно единице. Оптимальные значения уровня максимального лепестка  $P$  округлены с точностью до 0.1 дБ, а разрядность коэффициентов ограничена таким образом, чтобы значения максимального бокового лепестка  $P$  отличались от оптимальных не более чем на 0.1 дБ и показатель плоскостности  $\epsilon$  не превосходил заданного выше значения  $\epsilon < 0.05$ .

В табл. 1 представлены косинус-полиномиальные весовые функции со скоростями спада боковых лепестков  $V = 6, 12, 18, 24, 30, 36$  и  $48$  дБ/окт. Отметим, что весовые функции с  $V = 12, 24, 36$  и  $48$  дБ/окт невозможно получить для функций в виде суммы Фурье.

### 3. АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК СИНТЕЗИРОВАННЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим эмпирические зависимости между параметрами оптимальных косинус-полиномиальных функций, вытекающие из данных табл. 1.

Ошибка  $\delta$  на интервале уплощения находится в диапазоне  $0.3...0.01\%$  и уменьшается при увеличении параметра  $\beta$  и скорости спада боковых лепестков  $V$ . На рис. 2 представлена зависимость ошибки от параметра  $\beta$  для оптимальных косинус-полиномиальных функций со скоростями спада боковых лепестков 6, 24 и 36 дБ/окт.

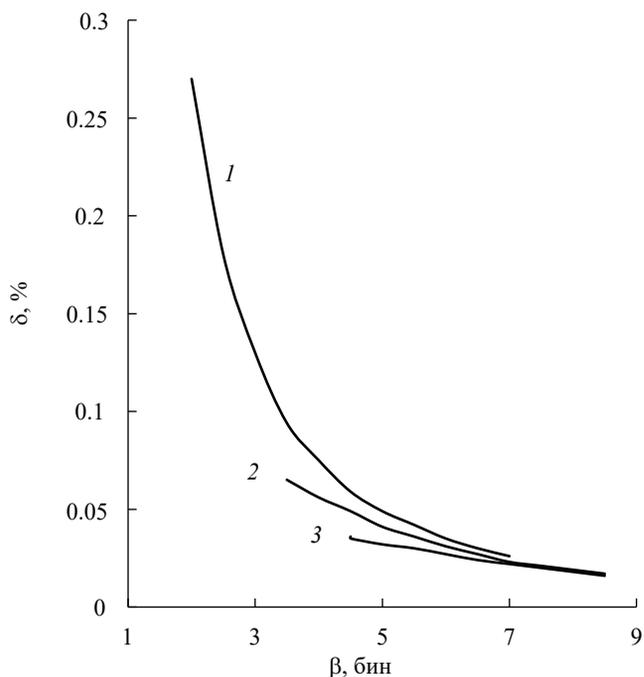


Рис. 2. Зависимость ошибки  $\delta$  на интервале уплощения от параметра синтеза  $\beta$  для оптимальных косинус-полиномиальных функций со скоростями спада боковых лепестков 6 (1), 24 (2) и 36 дБ/окт (3).

Зависимости хорошо аппроксимируются степенными функциями. Например, для  $V = 6$  и  $24$  дБ/окт уравнения тренда имеют соответственно вид  $\delta = 0.9933 \beta^{-1.868}$  и  $0.4875 \beta^{-1.555}$ . Наклон этих трендов уменьшается с увеличением скорости спада боковых лепестков.

Зависимости между другими параметрами оптимальных весовых функций, представленными в табл. 1, аналогичны таковым для функций без плоской вершины [14]. Рассмотрим, например, зависимость уровня максимального бокового лепестка от параметра  $\beta$ , которая представлена на рис. 3 для оптимальных функций со скоростями спада боковых лепестков 6 и 24 дБ/окт.

Таблица 1. Параметры оптимальных косинус-полиномиальных функций с плоской вершиной

$m$	$\beta$	$P$ , дБ	$\delta$ , %	Коэффициенты $a_0; a_1; \dots; a_m$	$P_w$ , дБ	$G$	$L_n$ , бин	$L_3$ , бин	$L_6$ , бин
$V = 6$ дБ/окт									
1	2.0	-17.5	0.27	-0.2058; 1.0	3.881	0.370	2.444	2.410	2.871
2	2.5	-32.8	0.18	-0.0849; -0.0551; 1.0	4.365	0.305	2.732	2.712	3.278
2	3.0	-44.4	0.13	-0.0263; -0.3398; 1.0	4.696	0.282	2.948	2.924	3.552
3	3.5	-58.8	0.094	-0.01478; -0.65869; 1.0; 0.93106;	5.074	0.256	3.216	3.184	3.886
3	4.0	-70.5	0.075	-0.00283; -0.25679; -0.02561; 1.0	5.331	0.240	3.413	3.376	4.130
4	4.5	-83.0	0.060	-0.000817; -0.134039; -0.414548; 1.0; 0.254490	5.592	0.225	3.624	3.581	4.392
4	5.0	-95.1	0.049	-0.00036; -0.09691; -0.73432; 0.87847; 1.0	5.808	0.214	3.809	3.761	4.621
5	5.5	-108.0	0.042	-0.0000647; -0.0276317; -0.3964405; 0.0148317; 1.0; 0.1068130	6.015	0.203	3.995	3.942	4.851
5	6.0	-120.8	0.035	-0.00001762; -0.01131270; -0.27123647; -0.39563895; 1.0; 0.39184377	6.198	0.195	4.167	4.110	5.064
6	6.5	-134.2	0.030	-0.000005539; -0.005197694; -0.194650482; -0.699120202; 0.744814595; 1.0; 0.053746853	6.374	0.187	4.339	4.279	5.277
6	7.0	-147.6	0.026	-0.000001002; -0.001351839; -0.075599415; -0.492165702; 0.05642293; 1.0; 0.19183937	6.533	0.180	4.501	4.437	5.477
$V = 12$ дБ/окт									
1	2.5	-24.8	0.15	-0.3595; 1.0	4.489	0.305	2.811	2.802	3.374
2	3.0	-41.1	0.11	-0.2516; 0.1541; 1.0	4.852	0.271	3.057	3.034	3.685
2	3.5	-54.1	0.091	-0.0851; -0.3090; 1.0	5.108	0.255	3.242	3.213	3.917
3	4.0	-68.3	0.070	-0.04684; -0.60245; 1.0; 0.52783	5.401	0.236	3.468	3.430	4.198
3	4.5	-80.7	0.058	-0.01677; -0.44082; 0.24368; 1.0	5.621	0.224	3.648	3.606	4.421
4	5.0	-93.7	0.047	-0.00490; -0.23125; -0.28170; 1.0; 0.17370	5.843	0.212	3.840	3.792	4.659
4	5.5	-106.6	0.040	-0.00217; -0.16957; -0.64210; 1.0; 0.67584	6.035	0.202	4.013	3.961	4.873
5	6.0	-119.6	0.034	-0.0005994; -0.0717787; -0.5425161; 0.2842445; 1.0; 0.0778810	6.219	0.194	4.187	4.131	5.089
5	6.5	-132.8	0.030	-0.00016243; -0.02870899; -0.36830563; -0.2187019; 1.0; 0.27991797	6.386	0.186	4.352	4.291	5.292
6	7.0	-146.4	0.026	-0.00006188; -0.01570636; -0.31566330; -0.66203881; 1.0; 0.84900977; 0.03509357	6.548	0.179	4.516	4.452	5.495
6	7.5	-159.6	0.023	-0.000014373; -0.005032537; -0.147436479; -0.591258462; 0.313909878; 1.0; 0.147519419	6.692	0.173	4.669	4.601	5.683
$V = 18$ дБ/окт									
1	3.0	-31.7	0.095	-0.4675; 1.0	5.008	0.265	3.168	3.153	3.822
2	3.5	-49.1	0.077	-0.4826; 0.4280; 1.0	5.270	0.245	3.365	3.337	4.068
2	4.0	-62.7	0.067	-0.1696; -0.2414; 1.0	5.472	0.233	3.525	3.490	4.268
3	4.5	-77.4	0.053	-0.0931; -0.5517; 1.0; 0.3535	5.703	0.220	3.718	3.676	4.507
3	5.0	-90.2	0.045	-0.05105; -0.64161; 0.55650; 1.0	5.892	0.210	3.883	3.836	4.712
4	5.5	-103.6	0.038	-0.015198; -0.341811; -0.132140; 1.0; 0.129248	6.083	0.200	4.058	4.005	4.928
4	6.0	-116.9	0.033	-0.006535; -0.239532; -0.506054; 1.0; 0.472003	6.253	0.192	4.219	4.163	5.128
5	6.5	-130.6	0.028	-0.0025853; -0.1460099; -0.6730881; 0.5717724; 1.0; 0.0607150	6.418	0.185	4.384	4.323	5.331

Таблица 1. Продолжение

$m$	$\beta$	$P$ , дБ	$\delta$ , %	Коэффициенты $a_0; a_1; \dots; a_m$	$P_w$ , дБ	$G$	$L_n$ , бин	$L_3$ , бин	$L_6$ , бин
5	7.0	-144.1	0.025	-0.0007052; -0.0582500; -0.4657719; -0.0394836; 1.0; 0.2129849	6.569	0.178	4.538	4.474	5.522
6	7.5	-158.0	0.022	-0.00025548; -0.02988054; -0.37826658; -0.47690218; 1.0; 0.61189476; 0.02027282	6.718	0.172	4.696	4.628	5.717
6	8.0	-170.9	0.020	-0.00008856; -0.01393468; -0.25309292; -0.66517914; 0.59152672; 1.0; 0.11766008	6.847	0.167	4.838	4.767	5.891
$V=24$ дБ/окт									
1	3.5	-38.3	0.065	-0.5456; 1	5.434	0.238	3.495	3.472	4.229
2	4.0	-56.8	0.056	-0.7623; 0.7474; 1.0	5.630	0.225	3.656	3.621	4.429
2	4.5	-71.0	0.049	-0.2765; -0.1431; 1.0	5.793	0.216	3.795	3.755	4.602
3	5.0	-85.7	0.041	-0.1490; -0.4991; 1.0; 0.2634	5.982	0.206	3.964	3.917	4.812
3	5.5	-99.4	0.037	-0.1150; -0.8451; 0.9096; 1.0	6.141	0.198	4.113	4.061	4.996
4	6.0	-113.0	0.031	-0.034356; -0.458811; 0.032437; 1.0; 0.101252	6.307	0.190	4.273	4.217	5.194
4	6.5	-126.8	0.027	-0.014552; -0.315271; -0.382730; 1.0; 0.355551	6.458	0.183	4.424	4.364	5.380
5	7.0	-140.8	0.023	-0.007754; -0.256841; -0.777508; 0.879337; 1.0; 0.049226	6.607	0.177	4.579	4.514	5.571
5	7.5	-154.9	0.021	-0.0021128; -0.1022207; -0.5569389; 0.1428933; 1.0; 0.1707920	6.744	0.171	4.725	4.657	5.752
6	8.0	-169.2	0.019	-0.00074274; -0.05063492; -0.44288236; -0.32105839; 1.0; 0.47218810; 0.01288659	6.880	0.165	4.876	4.804	5.938
6	8.5	-181.6	0.017	-0.00035541; -0.03175610; -0.39373679; -0.70084817; 0.88010073; 1.0; 0.09721313	6.996	0.161	5.008	4.933	6.101
$V=30$ дБ/окт									
1	4.0	-44.7	0.048	-0.6043; 1.0	5.795	0.217	3.797	3.766	4.603
2	4.5	-64.3	0.042	-0.9812; 1.0; 0.9093	5.944	0.208	3.930	3.890	4.768
2	5.0	-79.0	0.039	-0.4015; -0.0215; 1.0	6.076	0.201	4.051	4.005	4.918
3	5.5	-93.9	0.034	-0.21434; -0.43553; 1.0; 0.20544	6.234	0.194	4.201	4.150	5.104
3	6.0	-108.0	0.030	-0.16675; -0.80812; 1.0; 0.78428	6.374	0.187	4.339	4.283	5.274
4	6.5	-122.3	0.026	-0.06522; -0.57864; 0.21377; 1.0; 0.08188	6.516	0.181	4.484	4.423	5.454
4	7.0	-136.3	0.023	-0.02712; -0.39375; -0.26295; 1.0; 0.28206	6.652	0.175	4.626	4.561	5.629
5	7.5	-150.7	0.021	-0.015297; -0.338591; -0.703484; 1.0; 0.830448; 0.034026	6.786	0.169	4.771	4.703	5.808
5	8.0	-164.8	0.018	-0.005144; -0.163839; -0.637682; 0.333683; 1.0; 0.142462	6.910	0.164	4.909	4.838	5.979
6	8.5	-179.1	0.017	-0.0018275; -0.0810472; -0.5095088; -0.1647556; 1.0; 0.3763128; 0.0086575	7.033	0.160	5.050	4.975	6.152
6	9.0	-191.9	0.015	-0.00092745; -0.05382616; -0.48363866; -0.58026883; 1.0; 0.84225132; 0.06919739	7.140	0.156	5.176	5.098	6.308
$V=36$ дБ/окт									
1	4.5	-51.0	0.036	-0.64976; 1.0	6.105	0.201	4.078	4.039	4.950
2	5.0	-71.5	0.033	-0.96462; 1.0; 0.67726	6.223	0.195	4.191	4.144	5.090
2	5.5	-86.9	0.030	-0.54147; 0.11785; 1.0	6.331	0.189	4.297	4.246	5.221
3	6.0	-102.0	0.027	-0.28758; -0.36314; 1.0; 0.16583	6.464	0.183	4.430	4.374	5.387

Таблица 1. Окончание

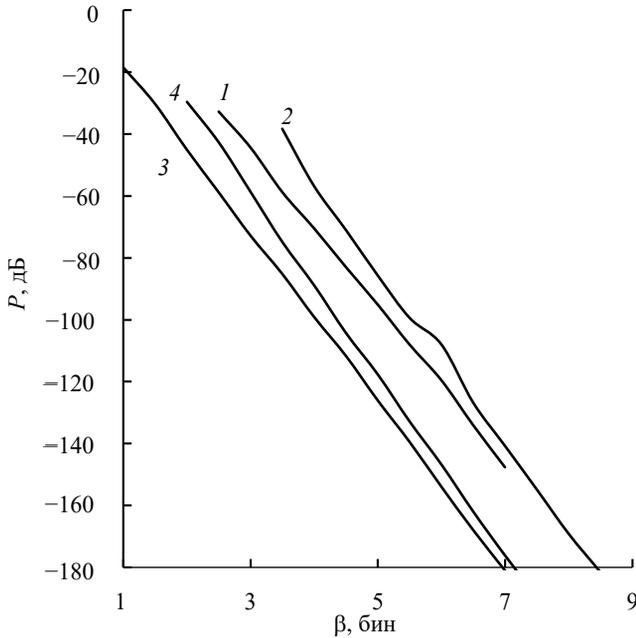
$m$	$\beta$	$P$ , дБ	$\delta$ , %	Коэффициенты $a_0; a_1; \dots; a_m$	$P_w$ , дБ	$G$	$L_n$ , бин	$L_3$ , бин	$L_6$ , бин
3	6.5	-116.4	0.024	-0.21167; -0.71494; 1.0; 0.59759	6.587	0.178	4.557	4.497	5.544
4	7.0	-131.0	0.022	-0.108176; -0.691993; 0.397743; 1.0; 0.068817	6.714	0.172	4.692	4.628	5.711
4	7.5	-145.7	0.020	-0.045299; -0.473798 -0.140415; 1.0; 0.231119	6.833	0.168	4.823	4.755	5.872
5	8.0	-160.4	0.018	-0.024324; -0.389444; -0.565845; 1.0; 0.647523; 0.022534	6.955	0.163	4.961	4.889	6.042
5	8.5	-174.3	0.016	-0.010855; -0.246586; -0.705736; 0.539992; 1.0; 0.120590	7.067	0.158	5.089	5.014	6.201
6	9.0	-188.6	0.014	-0.0038770; -0.1213592; -0.5717272; -0.0129621; 1.0; 0.3108949; 0.0061605	7.178	0.154	5.222	5.144	6.364
6	9.5	-201.7	0.013	-0.0018762; -0.0768662; -0.5250184; -0.4156023; 1.0; 0.6672301; 0.0474213	7.278	0.151	5.344	5.263	6.514
$V=48$ дБ/окт									
1	5.5	-63.4	0.023	-0.7155; 1.0	6.618	0.177	4.590	4.538	5.582
2	6.0	-85.7	0.021	-0.9540; 1.0; 0.4382	6.698	0.174	4.675	4.618	5.687
2	6.5	-101.5	0.020	-0.8437; 0.4185; 1.0	6.776	0.170	4.760	4.699	5.792
3	7.0	-117.2	0.019	-0.44613; -0.20911; 1.0; 0.11939	6.873	0.166	4.868	4.803	5.926
3	7.5	-132.9	0.017	-0.31225; -0.56112; 1.0; 0.39265	6.967	0.162	4.974	4.905	6.057
4	8.0	-148.1	0.016	-0.24203; -0.90117; 0.80311; 1.0; 0.05091	7.068	0.159	5.091	5.019	6.202
4	8.5	-163.3	0.015	-0.09992; -0.62765; 0.10602; 1.0; 0.16848	7.166	0.155	5.207	5.132	6.345
5	9.0	-179.1	0.013	-0.051338; -0.495767; -0.340235; 1.0; 0.441508; 0.011607	7.267	0.151	5.329	5.251	6.496
5	9.5	-192.8	0.012	-0.035187; -0.476223; -0.783423; 0.977648; 1.0; 0.090512	7.357	0.148	5.442	5.360	6.634
6	10.0	-207.4	0.011	-0.0126919; -0.2342511; -0.6748377; 0.2930644; 1.0; 0.2256448; 0.0033994	7.451	0.145	5.560	5.476	6.780
6	10.5	-221.0	0.010	-0.0058034; -0.1402951; -0.6068621; -0.1386865; 1.0; 0.4613306; 0.0252905	7.538	0.142	5.673	5.586	6.919

Как и для функций без плоской вершины, увеличение скорости спада лепестков приводит к увеличению уровня максимального бокового лепестка. Для фиксированной скорости спада каждая кривая хорошо аппроксимируется прямой линией, небольшие отклонения от которой имеют случайный вид. При увеличении скорости спада лепестков увеличивается крутизна аппроксимирующих прямых, что приводит к сближению кривых между собой при увеличении  $\beta$ . Сближение кривых при увеличении  $\beta$  наблюдается и для других параметров весовых функций. Поэтому чем больше скорость спада лепестков, тем меньше плата за увеличение скорости спада.

На том же рисунке показаны аналогичные зависимости для оптимальных функций без плоской вершины при скоростях спада лепестков 6 и 24 дБ/окт, заимствованные из [14]. Нетрудно заметить, что при одной и той же скорости спада лепестков графики для функции с плоской вершиной и без нее примерно параллельны. Это означает,

что требование плоской вершины приводит к ухудшению максимального уровня лепестка в среднем на 30...35 дБ и это значение не зависит от  $\beta$ . Такая величина примерно соответствует изменению порядка функции на единицу. Этот факт объясняется тем, что из всех степеней свободы, представляемых независимыми коэффициентами функции, одна степень уходит для обеспечения плоской вершины, т.е. для выполнения условия (4). Для получения одинаковых уровней максимального бокового лепестка порядок функции с плоской вершиной должен быть на единицу больше, чем для функции без этого свойства.

Аналогичная независимость от параметра  $\beta$  наблюдается и для полос главного лепестка по уровням  $-3$  и  $-6$  дБ и для шумовой полосы. При одинаковых параметрах  $m$  и  $\beta$  требование плоской вершины приводит к расширению полосы главного лепестка по уровню  $-3$  дБ примерно в 1.8 раза, по уровню  $-6$  дБ – примерно в 1.6 раза. Шумовая полоса расширяется несколько больше, чем в 1.7 раза,



**Рис. 3.** Зависимости уровней максимальных боковых лепестков на отрезке  $[\beta, N/2]$  бин от параметра  $\beta$  для оптимальных весовых функций с плоской вершиной (1, 2) и без этого свойства (3, 4) для скоростей спада боковых лепестков 6 (1, 3) и 24 дБ/окт (2, 4).

что соответствует увеличению потерь примерно на 2.3 дБ. Подобное довольно значительное расширение является ценой за обеспечение плоской вершины спектра весовой функции. Для получения близких значений полос длительность анализируемого сигнала для функций с плоской вершиной должна быть примерно в 1.7...1.8 раза больше, чем для функций без этого свойства.

#### 4. УМЕНЬШЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА

В представленном методе уменьшение ошибки измерения амплитуды достигается за счет повышения порядка функции и увеличения параметра  $\beta$ ,

определяющего нижнюю границу отрезка минимизации уровня боковых лепестков. Однако при этом снижается и уровень максимального бокового лепестка, что не всегда является оправданным. Рассмотрим другой способ уменьшения ошибки.

Расстановка точек вычисления спектра при анализе весовой функции традиционно выполняется с шагом 1 бин. В начальный период развития цифрового спектрального анализа это было обусловлено слабой производительностью устройств цифровой обработки сигналов. Однако в настоящее время в большинстве приложений вычислительные средства позволяют произвести расчет спектра (дискретного преобразования Фурье) с увеличенным числом точек и уменьшенным расстоянием между ними. При использовании алгоритмов быстрого преобразования Фурье типовая методика уменьшения этого расстояния состоит в том, чтобы увеличить перед преобразованием количество выборок в сигнале путем добавления необходимого количества нулевых выборок [3]. Это приводит к увеличению объема вычислений, однако на современном уровне развития техники обработки сигналов во многих случаях такое допустимо.

Рассмотрим, например, расстановку точек вычисления спектра с расстоянием между ними в  $1/r$  бин, где коэффициент уменьшения  $r = 2^k, k = 0, 1, 2, 3$ . При этом отрезок уплощения и частота  $f_c$  в (4) также необходимо уменьшить при синтезе окна в  $r$  раз. В табл. 2 представлены результаты синтеза оптимальных косинус-полиномиальных функций при указанных расстояниях между точками вычисления спектра для трех типичных наборов параметров.

Из таблицы следует, что при уменьшении расстояния между отсчетами спектра в  $r$  раз ошибка  $\delta$  снижается примерно в  $r^4$  раз. При этом другие параметры функции, включая коэффициенты, изменяются слабо. Описанный способ можно использовать для снижения ошибки, если другие параметры функции удовлетворяют необходимым условиям для рассматриваемого приложения.

**Таблица 2.** Изменение параметров оптимальных косинус-полиномиальных функций при увеличении количества точек вычисления спектра

Шаг $1/r$ , бин	$P$ , дБ	$\delta$ , %	Коэффициенты $a_0; a_1; \dots; a_m$	$P_w$ , дБ	$G$	$L_n$ , бин	$L_3$ , бин	$L_6$ , бин
$V = 6$ дБ/окт, $m = 2, \beta = 3$								
1	-44.4	0.13	-0.0263; -0.3398; 1.0	4.696	0.282	2.948	2.924	3.552
0.5	-44.8	0.0082	-0.0259; -0.3306; 1.0	4.609	0.286	2.890	2.875	3.515
0.25	-44.8	0.00051	-0.02587; -0.32824; 1.0	4.588	0.286	2.876	2.863	3.506

Таблица 2. Окончание

Шаг 1/r, бин	P, дБ	$\delta$ , %	Коэффициенты $a_0; a_1; \dots; a_m$	$\Pi_w$ , дБ	G	$L_n$ , бин	$L_3$ , бин	$L_6$ , бин
0.125	-44.9	0.000032	-0.02584; -0.32767; 1.0	4.583	0.287	2.873	2.860	3.504
$V = 18$ дБ/окт, $m = 3$ , $\beta = 5$								
1	-90.2	0.045	-0.05105; -0.64161; 0.55650; 1.0	5.892	0.210	3.883	3.836	4.712
0.5	-90.4	0.0028	-0.05086; -0.63768; 0.56282; 1.0	5.841	0.211	3.838	3.797	4.682
0.25	-90.5	0.00017	-0.05081; -0.63669; 0.56442; 1.0	5.829	0.212	3.827	3.788	4.675
0.125	-90.5	0.000011	-0.05080; -0.63644; 0.56481; 1.0	5.826	0.212	3.825	3.786	4.673
$V = 36$ дБ/окт, $m = 4$ , $\beta = 7$								
1	-131	0.022	-0.108176; -0.691993; 0.397743; 1.0; 0.068817	6.714	0.172	4.692	4.628	5.711
0.5	-131.1	0.0014	-0.107932; -0.689548; 0.400738; 1.0; 0.068761	6.679	0.173	4.655	4.596	5.685
0.25	-131.2	0.000085	-0.107870; -0.688932; 0.401494; 1.0; 0.068747	6.671	0.173	4.646	4.588	5.679
0.125	-131.2	0.0000054	-0.107856; -0.688779; 0.401687; 1.0; 0.068743	6.668	0.174	4.643	4.586	5.678

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Весовые функции с плоской вершиной при использовании совместно с дискретным преобразованием Фурье обеспечивают простой способ повышения точности измерения амплитуды гармонических составляющих анализируемого сигнала. Предложенный в данной работе метод синтеза таких функций предоставляет возможность синтезировать весовые функции с плоской вершиной, имеющие следующие свойства: произвольно заданная скорость спада боковых лепестков  $V \geq 6$  дБ/окт; минимально возможный при выбранном порядке функции уровень боковых лепестков на заданном отрезке частотной оси; простейший среди известных способ вычисления значений весовой функции, что особенно существенно для приложений реального времени.

Предложенный способ повышения плоскостности спектра за счет увеличения количества спектральных отсчетов позволяет получить произвольно заданную малую ошибку измерения амплитуды гармонических составляющих.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хэррис Ф.Дж. // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 60.
2. Prabhu K.M.M. Window Functions and Their Applications in Signal Processing. Boca Raton: CRC Press, 2014.
3. Oppenheim A.V., Schaffer P.V. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
4. D'Antona G., Ferrero A. Digital Signal Processing for Measurement Systems. N.Y.: Springer Media, 2006.
5. Salvatore, L., Trotta A. // IEE Proc. 1988. V. 135. № 6. P. 346.
6. Heinzel G., Rudiger A., Schilling R. Spectrum and Spectral Density Estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), Including a Comprehensive List of Window Functions and Some New at-top Windows. Hannover: Max-Planck-Institut fur Gravitationsphysik, Teilinstitut. 2002, 84 p.
7. Cortés C.A., Mombello E., Dib R., Ratta G. // Signal Processing. 2007. V. 87. P. 2151.
8. Зайцев Г.В. // Радиотехника. 2011. № 3. С. 21.
9. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978.
10. Зайцев Г.В. // Радиотехника. 2012. № 1. С. 55.
11. Хзмалян А.Д. // Вестник воздушно-космической обороны. 2018. № 4. С. 90.
12. Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D. // Proc. Int. Conf. on Eng. and Telecom. (EnT). Dolgoprudny. 20–21 Nov. 2019. N.Y.: IEEE, 2019. <https://doi.org/10.1109/EnT47717.2019.9030552>
13. Зайцев Г.В., Хзмалян А.Д. // РЭ. 2021. Т. 66. № 5. С. 443. <https://doi.org/10.31857/S0033849421050120>
14. Зайцев Г.В., Хзмалян А.Д. Оптимальные весовые функции для гармонического анализа сигналов в реальном времени. М.: НПО «Алмаз», 2023. <https://elibrary.ru/item.asp?id=54363389>

# A FAMILY OF FLAT-TOP WINDOWS WITH LOW SPECTRUM SIDELOBES FOR HARMONIC ANALYSIS OF SIGNALS

**G. V. Zaytsev\*, A. D. Khzmalyan**

*«Almaz» Research and Production Corporation,  
Leningradskii prosp., 80, Build. 16, Moscow, 125190 Russian Federation*

*\*E-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru*

Received December 27, 2023, revised February 20, 2024, accepted February 24, 2024

Flat-top windows intended to reduce spectrum amplitude measurement error in discrete harmonic analysis are considered. A new family of flat-top windows, which provide the minimum level of the highest spectrum sidelobe and low calculation complexity is proposed. Mathematical representation of the new windows and a method of optimization of their parameters, which rely on authors' earlier works are described. A number of flat-top windows of orders 1...6 and sidelobe falloff rates of 6, 12, 18, 24, 30, 36, and 48 decibels per octave are synthesized, tables of their parameters are provided, and their characteristics are analyzed. An alternative technique to reduce the spectrum amplitude measurement error is proposed.

*Keywords:* harmonic analysis, flat-top windows, method of parameters optimization, minimum sidelobe level