

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОТСЧЕТОВ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННОГО МАРКОВСКОГО ШУМА

© 2024 г. А. Н. Детков

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
ул. Викторенко, 7, Москва, 125319 Российская Федерация

E-mail: detkov@gosniias.ru

Поступила в редакцию 19.03.2023 г.

После доработки 19.03.2023 г.

Принята к публикации 25.03.2023 г.

Методами марковской теории оценивания случайных процессов решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов интерполяции с постоянным запаздыванием отсчетов непрерывных компонент векторного дискретно-непрерывного марковского случайного процесса с учетом известных статистических характеристик аддитивного марковского коррелированного шума. При синтезе алгоритмов использован метод разностных измерений. Приведена структурная схема квазиоптимального цифрового фильтра. На простом примере методом имитационного моделирования показана работоспособность квазиоптимального алгоритма в статистически неопределенных ситуациях при наведении объекта управления на маневрирующую воздушную цель.

Ключевые слова: марковская теория оценивания случайных процессов, дискретно-непрерывный марковский случайный процесс, интерполяции с постоянным запаздыванием, марковский коррелированный шум, метод разностных измерений, квазиоптимальный цифровой фильтр

DOI: 10.31857/S0033849424080075, EDN: NOJANQ

ВВЕДЕНИЕ

Теория условных марковских процессов, разработанная Р.Л. Стратоновичем [1] и развитая, прежде всего, М.С. Ярлыковым, М.А. Мироновым и другими авторами [2, 3] для синтеза алгоритмов оптимальной и квазиоптимальной обработки дискретно-непрерывных марковских случайных процессов (ДНМП) в современных радиоэлектронных комплексах (РЭК), дает решение задач интерполяции (сглаживания), когда оптимальная оценка случайного процесса формируется внутри интервала наблюдения на фоне шумов, в том числе окрашенных, и в случае статистически неопределенных ситуаций. Интерполяция с постоянным запаздыванием (ИПЗ) [4–6] дает возможность вычислить в реальном масштабе времени текущую интерполяционную оценку, поэтому она в наилучшей степени удовлетворяет требованиям большинства прикладных задач [7–9].

В современных РЭК алгоритмы оптимальной или квазиоптимальной обработки ДНМП практически реализуются с помощью средств цифровой обработки сигналов [7, 8]. Поэтому указанные алгоритмы необходимо синтезировать в дискретной

форме в виде рекуррентных соотношений, удобных для такой реализации. В то же время в большинстве случаев математические модели оцениваемых и наблюдаемых в РЭК процессов имеют непрерывную форму записи [10–12], что обусловлено физической сущностью происходящих с сигналами явлений. В связи с этим возникает проблема синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов дискретной ИПЗ отсчетов ДНМП [2].

Основная трудность синтеза алгоритмов ИПЗ отсчетов ДНМП состоит в построении совместного марковского процесса, описывающего векторы состояния и измерения. Это обусловлено тем, что в непрерывном времени векторные случайные процессы $x(t)$ и $x(t + \Delta)$ совместно не являются марковскими, даже если векторный случайный процесс $x(t)$ сам по себе является марковским и значение постоянной задержки Δ точно известно [13]. Совместный марковский процесс в этом случае можно построить только для дискретных векторных сообщений [14]. Следовательно, для синтеза алгоритма ИПЗ отсчетов ДНМП необходимо эквивалентное дискретное представление [15] априорных уравнений состояния и измерения непрерывных компонент векторного ДНМП,

математические модели которых имеют непрерывную форму записи исходя из физической сущности явлений.

В то же время современная элементная база позволяет использовать в электронных измерительных устройствах РЭК высокую частоту дискретизации, что приводит к автокорреляции измерительных отсчетов. Поэтому при статистическом синтезе цифровых фильтров (ЦФ) [16] при реализации алгоритма ИПЗ отсчетов ДНМП необходимо учитывать коррелированность шумов измерений, которые существенно влияют на формируемые оптимальные оценки. Метод разностных измерений представляет наибольший практический интерес [17], поэтому используется далее в работе при синтезе алгоритмов ИПЗ отсчетов ДНМП.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вектор состояния рассматриваемой динамической системы описывается линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) с постоянными во времени коэффициентами, зависящим от изменяющегося во времени случайного дискретного параметра $A(k)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}^{(x)}(A(k))\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}^{(x)}(A(k))\xi^{(x)}(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

а модель наблюдения — линейным алгебраическим уравнением

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{h}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (2)$$

представляющим аддитивную смесь оцениваемого непрерывного n_x -мерного вектора фазовых координат $\mathbf{x}(t)$ и коррелированного n_y -мерного марковского шума $\mathbf{w}(t)$, отождествляемого с вектором состояния дополнительной линейной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} &= \mathbf{f}^{(w)}(B(k))\mathbf{w}(t) + \mathbf{g}^{(w)}(B(k))\xi^{(w)}(t), \\ \mathbf{w}(t_0) &= \mathbf{w}_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{w}_0$ — векторы начальных фазовых координат, имеющие гауссовское распределение; $\mathbf{f}^{(x)}$, $\mathbf{f}^{(w)}$ — матрицы известных коэффициентов размером $(n_x \times n_x)$ и $n_y \times n_y$, соответственно; $\mathbf{g}^{(x)}$, $\mathbf{g}^{(w)}$ — матрицы интенсивностей шумов размером $(n_x \times n_x)$ и $(n_y \times n_y)$, соответственно; $\mathbf{q}^{(x)} = \mathbf{g}^{(x)}\mathbf{g}^{(x)T}$, $\mathbf{q}^{(w)} = \mathbf{g}^{(w)}\mathbf{g}^{(w)T}$ — матрицы коэффициентов диффузии векторов $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$ соответственно; T — операция транспонирования; $\xi^{(x)}$, $\xi^{(w)}$ — векторы белых гауссовских шумов (БГШ) соответствующей размерности с нулевыми математическими ожиданиями и единичными матрицами интенсивностей; $A(k) \equiv A(t_k)$, $B(k) \equiv B(t_k)$ — дискретные

марковские процессы, характеризующие соответственно состояние параметров рассматриваемой динамической системы и окрашенных шумов измерений, описываемые цепями Маркова на M_1 и M_2 положений соответственно, с матрицами вероятностей переходов:

$$\begin{aligned} \Pi_1(k-1, k) &= \left\{ \pi_{ij}^a(k-1, k) \right\} = \\ &= \left\{ P(A(k) = a_j | A(k-1) = a_i) \right\}, \\ i, j &= \overline{1, M_1}, \\ \Pi_2(k-1, k) &= \left\{ \pi_{nm}^b(k-1, k) \right\} = \\ &= \left\{ P(B(k) = b_m | B(k-1) = b_n) \right\}, \\ n, m &= \overline{1, M_2}, \end{aligned}$$

смена состояний которых может происходить только в фиксированные моменты времени $t_k = t_0 + k\tau$, $k = 1, 2, \dots$, разделенные постоянным интервалом $\tau = t_k - t_{k-1}$; M_1 , M_2 — число значений дискретных параметров a_j , b_m соответственно, P — оператор вероятности.

В соответствии с методом разностных измерений в непрерывном времени эквивалентное уравнение измерений имеет канонический вид [17]

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} - \mathbf{f}^{(w)}\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}_{jm}^{(y)}\mathbf{x}(t) + \Xi(t). \quad (4)$$

Здесь

$$\mathbf{f}_{jm}^{(y)} = \mathbf{h}\mathbf{f}_j^{(x)}\mathbf{F}_j^{(x)} - \mathbf{f}_m^{(w)}\mathbf{h};$$

$$\mathbf{f}_{jm}^{(y)} \equiv \mathbf{f}^{(y)}(A(k) = a_j, B(k) = b_m);$$

$$\mathbf{f}_j^{(x)} \equiv \mathbf{f}^{(x)}(A(k) = a_j); \mathbf{f}_m^{(w)} \equiv \mathbf{f}^{(w)}(B(k) = b_m);$$

$$\Xi(t) = \mathbf{h}\mathbf{g}_j^{(x)}\xi^{(x)}(t) + \mathbf{g}_m^{(w)}\xi^{(w)}(t)$$

— вектор БГШ, где

$$\mathbf{g}_j^{(x)} \equiv \mathbf{g}^{(x)}(A(k) = a_j); \mathbf{g}_m^{(w)} \equiv \mathbf{g}^{(w)}(B(k) = b_m),$$

со статистическими характеристиками

$$\mathbf{M}\{\Xi\} = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\Xi(t)\Xi^T(t + \tau_t)\} &= \\ &= (\mathbf{h}\mathbf{g}_j^{(x)}\mathbf{g}_j^{(x)T}\mathbf{h}^T + \mathbf{g}_m^{(w)}\mathbf{g}_m^{(w)T})\delta(\tau_t). \end{aligned}$$

Из (4) видно, что эквивалентное измерение вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ происходит на фоне вектора БГШ $\Xi(t)$ за счет компенсации корреляционных связей процесса $\mathbf{w}(t)$, характеризуемых матрицей $\mathbf{f}_m^{(w)}$.

Однако дискретизация процесса $\mathbf{y}(t)$ наиболее часто осуществляется выборочными мгновенными значениями, для которых весовая функция выбора представляет собой δ -функцию [15]. Такой подход является некорректным при синтезе алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных случайных сообщений, так как мгновенные отсчеты при наличии в измерениях БГШ не имеют смысла, поскольку имеют бесконечную дисперсию [15]. В этом случае требуется эквивалентное разностное представление математических моделей оцениваемых и измеряемых процессов, имеющих непрерывную форму записи. Для этого перепишем (4) так, чтобы статистическая динамика векторного процесса $\mathbf{y}(t)$ описывалась СДУ:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} &= \mathbf{f}_m^{(w)} \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}_{jm}^{(y)} \mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{h} \mathbf{g}_j^{(x)} \xi^{(x)}(t) + \mathbf{g}_m^{(w)} \xi^{(w)}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользуемся далее основами теории условных марковских процессов, Р.Л. Стратоновича [12], в соответствии с которыми модели (2), (5) описываются в виде совместного дискретно-непрерывного марковского процесса $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T]^T$, СДУ

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{f}_{jm}^{(z)} \mathbf{z}(t) + \mathbf{g}_{jm}^{(z)} \xi^{(z)}(t), \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{f}_{jm}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j^{(x)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{jm}^{(y)} & \mathbf{f}_m^{(w)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{jm}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_j^{(x)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{h} \mathbf{g}_j^{(x)} & \mathbf{g}_m^{(w)} \end{bmatrix},$$

$$\xi^{(z)} = \begin{bmatrix} \xi^{(x)} \\ \xi^{(w)} \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (6) имеет вид [18]

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \Phi_{jm}^{(zz)}(t, t_0) \mathbf{z}_0 + \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi_{jm}^{(zz)}(t, \tau) \mathbf{g}_{jm}^{(z)}(\tau) \xi^{(z)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) фундаментальная матрица решений $\Phi_{jm}^{(zz)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{jm}^{(zz)}(t, t_0) = \mathbf{f}_{jm}^{(z)} \Phi_{jm}^{(zz)}(t, t_0), \quad \Phi_{jm}^{(zz)}(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (8)$$

а интеграл в правой части равенства (7) представляет собой векторный процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей центральных моментов второго порядка:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{jm}^{(zz)}(t, t_0) &= \\ &= \int_{t_0}^t \Phi_{jm}^{(zz)}(t, \tau) \mathbf{g}_{jm}^{(z)}(\tau) \mathbf{g}_{jm}^{(z)T}(\tau) \Gamma_{jm}^{(zz)T}(t, \tau) d\tau, \\ \mathbf{B}_{jm}^{(zz)}(t_0, t_0) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{I}$, $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая матрицы соответственно.

С учетом (8), (9), СДУ (6) может быть представлено в статистически эквивалентной форме в виде разностного уравнения с шагом дискретизации $\tau = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$ — дискретное время)

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \Phi_{jm}^{(zz)}(k, k-1) \mathbf{z}(k-1) + \\ &+ \Gamma_{jm}^{(zz)}(k, k-1) \mathbf{n}^{(z)}(k-1), \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\mathbf{z}(k) \equiv \mathbf{z}(t_k), \quad \Phi_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \Phi_j^{(xx)} & \mathbf{0} \\ \Phi_{jm}^{(yx)} & \Phi_m^{(yy)} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \Gamma_j^{(xx)} & \mathbf{0} \\ \Gamma_{jm}^{(yx)} & \Gamma_m^{(yy)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^{(x)} \\ \mathbf{n}^{(y)} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{n}^{(x)}$ и $\mathbf{n}^{(y)}$ — векторы размером $n \times 1$ и $m \times 1$ соответственно независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями; $\mathbf{z}_0 = \mathcal{N}\{\mathbf{z} - \mathbf{m}_0; \mathbf{B}_0\}$ — вектор начальных фазовых координат, имеющий нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\mathbf{m}_0$ и корреляционной матрицей $\mathbf{B}_0$.

Элементы блочной матрицы $\mathbf{B}_{jm}^{(zz)} = \Gamma_{jm}^{(zz)} \Gamma_{jm}^{(zz)T}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{jm}^{(zz)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j^{(xx)} & \mathbf{B}_{jm}^{(xy)} \\ \mathbf{B}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{B}_m^{(yy)} \end{bmatrix} =, \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_j^{(xx)T} & \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_{jm}^{(yx)T} \\ \Gamma_{jm}^{(yx)} \Gamma_j^{(xx)T} & \Gamma_{jm}^{(yx)} \Gamma_{jm}^{(yx)T} + \Gamma_{jm}^{(yy)} \Gamma_{jm}^{(yy)T} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\Gamma_{jm}^{(zz)}$, $\Gamma_j^{(xx)}$, $\Gamma_{jm}^{(yx)}$, $\Gamma_{jm}^{(yy)}$ — нижние треугольные матрицы, формируемые из соответствующих

элементов блочной матрицы $\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}$, например, с помощью алгоритма Холецкого [19].

Таким образом, для неперекрывающихся интервалов времени уравнения состояния (1) и наблюдения (5) могут быть представлены из (10) в статистически эквивалентной форме в виде разностных уравнений с шагом дискретизации $\tau = t_k - t_{k-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \Phi_j^{(xx)} \mathbf{x}(k-1) + \Gamma_j^{(xx)} \mathbf{n}^{(x)}(k-1), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \Phi_{jm}^{(yy)} \mathbf{y}(k-1) + \Phi_{jm}^{(yx)} \mathbf{x}(k-1) + \\ &+ \Gamma_{jm}^{(yx)} \mathbf{n}^{(x)}(k-1) + \Gamma_{jm}^{(yy)} \mathbf{n}^{(y)}(k-1), \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

В (11) и далее для простоты записи аргументы $k, k-1$ всех функций, где это возможно и не вызывает сомнений, опущены.

Эквивалентное дискретное представление (11), (12) непрерывных моделей векторов сообщения (2) и измерения (5) является абсолютно точным в том смысле, что для любых $t_k - t_{k-1} > 0$ оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, как и решение системы СДУ (2), (5), без погрешностей аппроксимации [15].

Применительно к решаемой задаче синтеза, вектор состояния представляет собой ДНМП

$$\left[\mathbf{x}^T(k), A(k), B(k) \right]^T \equiv \left[\mathbf{x}^T(k), \mathbf{S}^T(k) \right]^T,$$

где $\mathbf{x}(k)$ — непрерывная n_x -мерная компонента ДНМП, которая описывает в пространстве состояний динамику фазовых координат случайного процесса; $\mathbf{S}(k) \equiv [A(k), B(k)]^T$ — дискретная компонента ДНМП — двухкомпонентный дискретный марковский процесс, причем марковские цепи $A(k)$ и $B(k)$ не зависят друг от друга и не зависят от $\mathbf{x}(k)$.

Цель работы — на основе марковской теории оценивания случайных процессов разработать оптимальные (квазиоптимальные) алгоритмы ИПЗ ДНМП $[\mathbf{x}^T(k), A(k), B(k)]^T$ по наблюдаемым дискретным отсчетам выходных сигналов измерителей

$$\mathbf{y}_1^{k+N} = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k), \dots, \mathbf{y}(k+N)\},$$

формируемых на фоне окрашенных шумов измерений $\mathbf{w}(t)$ при заданном значении постоянной задержки $\Delta = N\tau$, кратной интервалу дискретизации τ .

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения поставленной задачи запишем расширенный вектор состояния $\mathbf{X}$, компонентами которого являются векторы исходной системы, взятые в моменты времени $k, k+1, \dots, k+N$ [13]

$$\mathbf{X}(k+N) = [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}^T(k+1), \dots, \mathbf{x}^T(k+N)]^T. \quad (13)$$

Введем нумерацию для компонентов вектора $\mathbf{X}$ относительно момента $k+N$ и перепишем (13) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k+N) &= \mathbf{X}(l) = \\ &= [\mathbf{x}_N^T(k+N), \mathbf{x}_{N-1}^T(k+N), \dots, \mathbf{x}_0^T(k+N)]^T = \\ &= [\mathbf{x}_N^T(l), \mathbf{x}_{N-1}^T(l), \dots, \mathbf{x}_0^T(l)]^T, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x}_a(k+N) = \mathbf{x}(k+N-a), a = \overline{0, N}, l = k+N.$$

С учетом (11) и тождеств вида $\mathbf{x}(k+a) = \mathbf{x}(k+a) \forall a = \overline{0, N-1}$ запишем уравнение для расширенного вектора состояния $\mathbf{X}(l)$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(l) &= \Phi_j^{(XX)}(l, l-1) \mathbf{X}(l-1) + \\ &+ \Gamma_j^{(XX)}(l, l-1) \mathbf{N}^{(X)}(l-1), \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_j^{(XX)} &= \begin{bmatrix} \Phi_j^{(xx)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \\ \Gamma_j^{(XX)} &= \begin{bmatrix} \Gamma_j^{(xx)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_j^{(XX)}, \Gamma_j^{(XX)}$ — блочные матрицы размером $(N+1) \times (N+1)$ блоков, $\mathbf{N}^{(X)}$ — последовательность независимых гауссовских векторов с характеристиками $\mathbf{M}\{\mathbf{N}^{(X)}\} = \mathbf{0}, \mathbf{M}\{\mathbf{N}^{(X)}(d) \mathbf{N}^{(X)T}(e)\} = \mathbf{I}_{Nn} \delta_{de}, \delta_{de}$ — символ Кронекера.

Нетрудно видеть, что выражения (6) и (9) совпадают по форме, отличаясь только размерностью. Кроме того, вектор $\mathbf{X}(l)$ является марковским. Поэтому оптимальные алгоритмы рекуррентной дискретной фильтрации, полученные в работе [17] для исходной системы (11), можно применить для выражения (14).

На основании рекуррентной формулы Р.Л. Стратоновича [2] апостериорного распределения смешанного вектора состояния $[\mathbf{X}^T(l), \mathbf{S}^T(l)]^T$

в дискретном времени и свойств марковских процессов в дискретном времени запишем рекуррентные уравнения апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП на текущем l -м шаге $P_{jm}^*(l) = P(A(l) = a_j, B(l) = b_m | \mathbf{y}_1^l)$ и условной апостериорной ПВ непрерывной компоненты ДНМП $f_{jm}^*(\mathbf{X}(l)) = f(\mathbf{X}(l) | A(l) = a_j, B(l) = b_m, \mathbf{y}_1^l)$, полученные по наблюдаемой последовательности измерений $\mathbf{Y}_1^l = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(l)\}$ [17]:

$$P_{jm}^*(l) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{f(\mathbf{y}(l) | \mathbf{x}(l), A(l) = a_j, B(l) = b_m, \mathbf{Y}_1^{l-1})}{f(\mathbf{y}(l) | \mathbf{Y}_1^{l-1})} P_{in}^*(l-1), \quad (15)$$

$$f_{jm}^*(\mathbf{X}(l)) = \frac{f(\mathbf{y}(l) | \mathbf{X}(l), A(l) = a_j, B(l) = b_m)}{f(\mathbf{y}(l) | \mathbf{X}(l), A(l) = a_j, B(l) = b_m, \mathbf{Y}_1^{l-1})} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{X}(l)), \quad (16)$$

где

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{X}(l)) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(l-1) \int f_j(\mathbf{X}(l) | \mathbf{X}(l-1)) f_{in}^*(\mathbf{X}(l-1)) d\mathbf{X}(l-1), \quad (17)$$

— условная экстраполированная ПВ непрерывной компоненты ДНМП; $f(\mathbf{y}(l) | \mathbf{X}(l), A(l) = a_j, B(l) = b_m, \mathbf{Y}_1^{l-1})$ — условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов; $f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{Y}_1^{l-1})$ — нормирующий множитель; $f_{in}^*(\mathbf{X}(l-1))$ — условная апостериорная ПВ вектора $\mathbf{X}(l-1)$ при условии $A(l-1) = a_i$, $B(l-1) = b_n$, полученная на предыдущем $l-1$ -м шаге; $f_j(\mathbf{X}(l) | \mathbf{X}(l-1)) = f(\mathbf{X}(l) | \mathbf{X}(l-1), A(l) = a_j)$ — условная плотность вероятности (ПВ), определяемая с помощью уравнения (14);

Алгоритм совместной фильтрации компонент ДНМП (15) — (17) является нелинейным даже для линейных априорных уравнений (12), (14). Нелинейные операции выполняются при вычислении условной ПВ, используемой для определения апостериорных вероятностей (15). Особенность синтезированного алгоритма состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и интерполяции дискретного и непрерывного компонентов между собой.

3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ИПЗ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДНМП НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Практическая реализация оптимального алгоритма совместного оценивания компонент ДНМП (15) — (17) встречает значительные трудности. Они обусловлены требованием больших объемов памяти и быстродействия вычислителя при выполнении численного интегрирования многомерных ПВ для получения требуемых оптимальных оценок компонент ДНМП в реальном масштабе времени. Поэтому представляет большой интерес синтез квазиоптимальных алгоритмов ИПЗ [2, 20].

Существует большое количество различных методов синтеза квазиоптимальных алгоритмов нелинейного оценивания [21]. Наибольшее распространение получил метод гауссовской аппроксимации, который требует минимальных вычислительных затрат по сравнению с остальными методами и во многих случаях позволяет задать требуемое качество оценивания, несмотря на приближенное нахождение компонент ДНМП. Для этого необходимо выполнить двухмоментную параметрическую гауссовскую аппроксимацию апостериорного распределения $f_{in}^*(\mathbf{X}(l-1))$. Эта аппроксимация состоит в замене этой неизвестной функций некоторыми известными функциями, в частности условными математическим ожиданием и ковариационной функцией, случайные значения которых определяются по выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{in}^*(l-1) &\equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}(l-1) | A(l-1) = \\ &= a_i, B(l-1) = b_n, \mathbf{y}_1^{l-1}\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{in}^*(l-1) &\equiv \mathbf{cov}\{\mathbf{X}(l-1), \mathbf{X}(l-1) | A(l-1) = \\ &= a_i, B(l-1) = b_n, \mathbf{y}_1^{l-1}\}, l = k + N. \end{aligned} \quad (19)$$

Применяя, таким образом, на каждом l -м шаге гауссовскую аппроксимацию для условного апостериорного распределения $f_{in}^*(\mathbf{X}(l-1))$, можно показать, что вектор текущей условной оценки непрерывного компонента ДНМП и ковариационная матрица ее погрешностей

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(k+N) &\equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}(k+N) | A(k+N) = \\ &= a_j, B(k+N) = b_m, \mathbf{Y}_1^{k+N}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{jm}^*(k+N) &\equiv \mathbf{cov}\{\mathbf{X}(k+N), \mathbf{X}(k+N) | A(k+N) = \\ &= a_j, B(k+N) = b_m, \mathbf{Y}_1^{k+N}\}, \end{aligned} \quad (20)$$

определяется с учетом (5), (7) по результатам текущих измерений $\mathbf{y}(k+N) \equiv \mathbf{y}(t_{k+N})$, формируемых накоплением (интегрированием) непрерывного наблюдения $\mathbf{y}(t)$ на интервалах времени между соседними отсчетами оцениваемого непрерывного компонента ДНМП, а первый блочный компонент расширенного вектора состояния содержит искомую интерполяционную оценку $\mathbf{x}_{jm}^*(k | k+N)$.

В рассматриваемом случае уравнения оценки расширенного вектора состояния $\mathbf{X}_{in}^*$ и диагональные элементы блочной ковариационной матрицы $\mathbf{K}_{jm}^*$ погрешностей оценивания имеют вид [13, 17]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{jm}^*(k | k+N) &= \mathbf{x}_{jm}^*(k+1 | k+N-1) + \\ &+ \mathbf{k}_{jm}^{(N)}(k+N) \Delta \mathbf{y}_{jm}(k+N), \\ \mathbf{x}_{jm}^*(k+1 | k+N) &= \mathbf{x}_{jm}^*(k+2 | k+N-1) + \\ &+ \mathbf{k}_{jm}^{(N-1)}(k+N) \Delta \mathbf{y}_{jm}(k+N); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{jm}^*(k+N-1 | k+N) &=, \\ &= \mathbf{x}_{jm}^*(k+N | k+N-1) + \mathbf{k}_{jm}^{(1)}(k+N) \Delta \mathbf{y}_{jm}(k+N), \\ \mathbf{x}_{jm}^*(k+N | k+N) &= \\ &= \tilde{\mathbf{x}}_{jm}(k+N-1 | k+N-1) + \\ &+ \mathbf{k}_{jm}^{(0)}(k+N) \Delta \mathbf{y}_{jm}(k+N); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{jm}^*(l-a, l-a | l) &= \mathbf{R}_{jm}^*(l-a+1, l-a+1 | l) - \\ &- \mathbf{R}_{jm}^*(l-a+1, l | l) \Phi_{jm}^{(yx)T} \times \\ &\times \left(\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l | l-1) \right)^{-1} \Phi_{jm}^{(yx)} \mathbf{R}_{jm}^*(l-a+1, l | l), \quad (23) \\ \mathbf{R}_{jm}^*(l, l | l) &= \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(l | l-1) - \\ &- \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(l | l-1) \left(\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l | l-1) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)T}(l | l-1), \\ a &= \overline{1, N}, l = k + N. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

1) $\Delta \mathbf{y}_{jm}(k+N)$ – невязка измерений (обновляющая последовательность):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}_{jm}(k+N) &= \int_{t_{k+N-1}}^{t_{k+N}} \mathbf{y}(t) dt - \\ &- \Phi_{jm}^{(yy)} \mathbf{y}(k+N) - \tilde{\mathbf{y}}_{jm}(k+N); \end{aligned} \quad (25)$$

2) $\tilde{\mathbf{x}}_{jm}(k+N)$ – условно-прогнозная оценка непрерывного компонента ДНМП при условии $A(k+N) = a_j, B(k+N) = b_m$;

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{jm}(k+N) &= \\ &= \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{M_2} \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k+N-1)}{\tilde{P}_{jm}(k+N)} \Phi_j^{(xx)} \mathbf{x}_{in}^*(k+N-1), \end{aligned} \quad (26)$$

3) $\tilde{\mathbf{y}}_{jm}(k+N)$ – прогнозируемое значение вектора измерений

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{jm}(k+N) &= \\ &= \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{M_2} \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k+N-1)}{\tilde{P}_{jm}(k+N)} \Phi_{jm}^{(yx)} \mathbf{x}_{in}^*(k+N-1); \end{aligned} \quad (27)$$

4) $\mathbf{R}_{jm}^*(l-a, l | l)$ – вне диагональные элементы блочной ковариационной матрицы $\mathbf{K}_{jm}^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{jm}^*(l-a, l | l) &= \mathbf{R}_{jm}^{*T}(l, l-a | l) = \\ &= \mathbf{R}_{jm}^*(l-a+1, l | l) \Phi_{jm}^{(xx)T} - \\ &- \mathbf{R}_{jm}^*(l-a+1, l | l) \Phi_{jm}^{(yx)T} \times \\ &\times \left(\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l | l-1) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)T}(l | l-1); \end{aligned} \quad (28)$$

5) $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(l | l-1)$ – ковариационная матрица погрешностей предсказания:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(l | l-1) = & \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{M_2} \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(l-1)}{\tilde{P}_{jm}(l)} \times \\ & \times \left\{ \Phi_j^{(xx)} \mathbf{R}_{in}^*(l-1, l-1 | l-1) \Phi_j^{(xx)T} + \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_j^{(xx)T} + \right. \\ & + \left[\Phi_j^{(xx)} \mathbf{x}_{in}^*(l-1 | l-1) - \tilde{\mathbf{x}}_{jm}(l) \right] \times \\ & \times \left[\Phi_j^{(xx)} \mathbf{x}_{in}^*(l-1 | l-1) - \tilde{\mathbf{x}}_{jm}(l) \right]^T \Big\}; \quad (29) \end{aligned}$$

6) $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k)$, $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k)$ – условные ковариационные матрицы погрешностей предсказания измерений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(l | l-1) = & \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{M_2} \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(l-1)}{\tilde{P}_{jm}(l)} \times \\ & \times \left(\Phi_j^{(xx)} \mathbf{R}_{in}^*(l-1, l-1 | l-1) \Phi_{jm}^{(yx)T} + \Gamma_{jm}^{(xx)} \Gamma_{jm}^{(yx)T} \right); \quad (30) \\ \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l) = & \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{n=1}^{M_2} \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(l-1)}{\tilde{P}_{jm}(l)} \times \\ & \times \left\{ \Phi_{jm}^{(yx)} \mathbf{R}_{in}^*(l-1, l-1 | l-1) \Phi_{jm}^{(yx)T} + \right. \\ & + \Gamma_{jm}^{(yx)} \Gamma_{jm}^{(yx)T} + \Gamma_{jm}^{(yy)} \Gamma_{jm}^{(yx)T} + \\ & + \left[\Phi_{jm}^{(yx)} \mathbf{x}_{in}^*(l-1 | l-1) - \tilde{\mathbf{y}}_{jm}(l) \right] \times \\ & \times \left[\Phi_{jm}^{(yx)} \mathbf{x}_{in}^*(l-1 | l-1) - \tilde{\mathbf{y}}_{jm}(l) \right]^T \Big\}; \quad (31) \end{aligned}$$

$$7) \mathbf{K}_{jm}^{(a)}(l) = \left[\mathbf{k}_{jm}^{(N)T}(l), \mathbf{k}_{jm}^{(N-1)T}(l), \dots, \mathbf{k}_{jm}^{(0)T}(l) \right]^T -$$

оптимальный коэффициент передачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{jm}^{(a)}(l) = & \mathbf{R}_{jm}^*(l-a, l-a | l) \Phi_{jm}^{(yx)} \left(\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l | l-1) \right)^{-1}, \\ & \forall a = \overline{1, N}; \\ \mathbf{k}_{jm}^{(0)}(k+N) = & \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(l | l-1) \left(\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l | l-1) \right)^{-1}, \\ & a = 0; l = k+N. \quad (32) \end{aligned}$$

При этом начальные условия для квазиоптимального алгоритма ИПЗ вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений:

$$\mathbf{X}_{jm}^*(0) = \mathbf{M} \{ \mathbf{X}_0 \}, \mathbf{K}_{jm}^*(0) = \text{cov} \{ \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 \},$$

$$\mathbf{P}_{in}^*(0) = \mathbf{P}_0, i = \overline{1, M_1}, n = \overline{1, M_2}.$$

Уравнения оценивания апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП (15) остается без изменения, а условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов имеет вид [20]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}(l) | \mathbf{X}(l), A(l) = a_j, B(l) = b_m, \mathbf{Y}_1^{l-1}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det \{ \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l) \}}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}(l) - \tilde{\mathbf{y}}_{jm}(l)) \left[\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(l) \right]^{-1} (\mathbf{y}(l) - \tilde{\mathbf{y}}_{jm}(l))^T \right\}, \\ l = k+N. \quad (33) \end{aligned}$$

Задача ИПЗ вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений считается решенной, если на выходе оптимального фильтра на каждом $k+N$ -м шаге формируется оптимальная оценка, соответствующая определенному критерию оптимальности. Байесовское решение может быть получено на основе минимизации апостериорного риска [22], который применительно к решаемой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^o(l) = & \left(\mathbf{x}^o(l), A(l) = a_j^o, B(l) = b_m^o \right) = \\ = & \underset{\tilde{\mathbf{x}}(l), j, m}{\text{argmin}} \sum_{\mu=1}^{M_1} \sum_{v=1}^{M_2} \int g_{jm\mu v}(\mathbf{x}(l), \tilde{\mathbf{x}}(l)) w_{jm}^*(\mathbf{x}(l)) d\mathbf{x}(l), \\ & l = k+N, \quad (34) \end{aligned}$$

где $g_{jm\mu v}(\mathbf{x}(l), \tilde{\mathbf{x}}(l))$ – функция потерь; $\mathbf{u}^o(l)$ – оптимальное решение.

При решении многих практических задач малым ошибкам непрерывного компонента соответствуют меньшие потери. В таких случаях применяется функция потерь [20], простая по дискретному и квадратичная по непрерывному компонентам:

$$\begin{aligned} g_{jm\mu v}(\mathbf{x}(l), \tilde{\mathbf{x}}(l)) = & \alpha (1 - \delta_{jm\mu v}) + \\ & + \beta \delta_{jm\mu v} (\mathbf{x}(l) - \tilde{\mathbf{x}}(l))^T (\mathbf{x}(l) - \tilde{\mathbf{x}}(l)), \quad (35) \end{aligned}$$

где α, β – коэффициенты потерь; $\delta_{jm\mu v}$ – символ Кронекера:

$$\delta_{jm\mu v} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mu, m = v, \\ 0, & \text{если } j \neq \mu, m \neq v, \end{cases} \mu = \overline{1, M_1}, \\ v = \overline{1, M_2}.$$

Функция потерь (31) означает, что при любом неправильном определении значений дискретного компонента потери равны коэффициенту α , а при правильном принятии решения потери пропорциональны сумме квадратов ошибок оценки непрерывного компонента. Подставляя выражение (35) в (34) и выполняя минимизацию апостериорного риска, можно показать, что решающее правило имеет следующий вид:

если

$$P_{jm}^*(l) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{jm}^*(l) \} \} \geq P_{\mu\nu}^*(l) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{\mu\nu}^*(l) \} \},$$

то

$$\mathbf{x}^o(k) = \mathbf{x}_{jm}^*(k), a_j^o = a_j^*, b_m^o = b_m^*, \quad (36)$$

где $\text{Tr} \{ \mathbf{A} \}$ — след матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, в качестве безусловной оценки непрерывного компонента ДНМП выступает условное апостериорное математическое ожидание $\mathbf{x}_{jm}^*(k)$. Из (36) следует, что принятие решения сводится к максимизации взвешенных апостериорных вероятностей дискретных компонент ДНМП. При этом следует отметить, что с увеличением погрешности оценки непрерывного компонента ДНМП уменьшаются веса погрешностей оценки дискретных компонент ДНМП. В результате может приниматься гипотеза с меньшей апостериорной вероятностью, но и с меньшими погрешностями оценки непрерывного компонента ДНМП, т.е. может отвергаться гипотеза с большей апостериорной вероятностью.

Условная ковариационная матрица $\mathbf{R}_{jm}^*(k+N)$ характеризует качество ИПЗ при правильном определении значений дискретных компонент $A(k+N) = a_j$, $B(k+N) = b_m$. Безусловная ковариационная матрица $\mathbf{R}^*(k+N)$ погрешностей оценки ИПЗ непрерывного компонента ДНМП определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*(k+N) = & \sum_j \sum_m \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{jm}^*(k+N) \times \\ & \times \left(\mathbf{R}_{jm}^*(k) + \left(\mathbf{x}_{jm}^*(k | k+N) - \mathbf{x}^*(k | k+N) \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\mathbf{x}_{jm}^*(k | k+N) - \mathbf{x}^*(k | k+N) \right)^T \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Квазиоптимальный цифровой фильтр ИПЗ вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений (рис. 1), реализующий алгоритм (15), (21)–(24), (33), (35)–(37), является многоканальным с числом каналов $M = M_1 \times M_2$ и в основном сохраняет структуру и все обратные связи, присущие оптимальному устройству. На вход каждого канала подаются текущие измерения $\mathbf{y}(k) \equiv \mathbf{y}(t_k)$, значения которых формируются в квантователе (Кв) аналого-цифрового преобразователя (АЦП) из

предварительно проинтегрированного аналоговым образом непрерывного процесса $\mathbf{y}(t)$ за время одного такта с обнулением интегратора в конце каждого такта. Каждый канал состоит из блока КУ — вычисления коэффициентов усиления $\mathbf{k}_{jm}^{(a)}$, блока фильтрации (БФ), в котором вычисляются условные оценки $\mathbf{x}_{jm}^*(k+N | k+N)$, $\mathbf{x}_{in}^*(k+N-1 | k+N-1)$ блока интерполяции (БИ), в котором рассчитываются векторы условных оценок $\mathbf{x}_{jm}^*(k | k+N)$, $\mathbf{x}_{in}^*(k-1 | k+N-1)$; блока прогноза (БП), в котором вычисляются условно-прогнозные оценки $\tilde{\mathbf{x}}_{jm}(k+N)$, $\tilde{\mathbf{y}}_{jm}(k+N)$; блока апостериорных вероятностей (БАВ), в котором рассчитываются $P_{jm}^*(k+N)$, $P_{in}^*(k+N-1)$, $\tilde{P}_{jm}(k+N)$, и блока вычисления корреляционных матриц (БКМ), в котором вычисляются $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}$, $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}$, $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}$, $\mathbf{R}_{jm}^*$ и $\mathbf{R}_{in}^*$. Окончательное решение о принятии безусловных оценок $\mathbf{x}^*(k | k+N) = \mathbf{x}_{jm}^*(k | k+N)$, $A(k+N) = a_j$, $B(k+N) = b_m$ производится в решающем устройстве (РУ).

Пример. В качестве примера использования синтезированного квазиоптимального алгоритма ИПЗ ДНМП на фоне гауссовского марковского случайного шума в условиях изменений статистических свойств этого шума в процессе оценивания рассмотрим задачу наведения объекта управления (ОУ) на маневрирующую воздушную цель (ВЦ) в горизонтальной плоскости. Угловое положение ОУ относительно ВЦ определяется системой СДУ:

$$\begin{aligned} d\varepsilon/dt &= \omega, \varepsilon(0) = \varepsilon_0; \\ d\omega/dt &= -2\alpha_\omega \omega - \chi^2 \varepsilon + \\ &+ \frac{1}{D} (j - j_\Pi) + \sqrt{4\alpha_\omega \chi^2 \sigma_\omega^2} \xi_1(t), \\ \omega(0) &= \omega_0, \\ dj_\Pi/dt &= -\alpha_\Pi j_\Pi + \sqrt{2\alpha_\Pi A(k) \sigma_\Pi^2} \xi_3(t), j_\Pi(0) = j_{\Pi 0}, \end{aligned} \quad (38)$$

где ε — наблюдаемый угол пеленга цели, ω — угловая скорость линии визирования (ЛВ) ОУ–ВЦ в плоскости управления, j_Π — поперечное ускорение цели — непрерывные компоненты ДНМП; $\alpha_\omega = V_{сб} / 2D$ и $\chi^2 = V V_{сб} / D^2$ — параметрические коэффициенты, характеризующие ширину и вид спектральной плотности флуктуаций углового положения ВЦ относительно вектора скорости ОУ; α_Π — коэффициент, характеризующий ширину спектральной плотности флуктуаций j_Π и зависящий от типа цели; σ_Π^2 — дисперсия флуктуаций j_Π ;

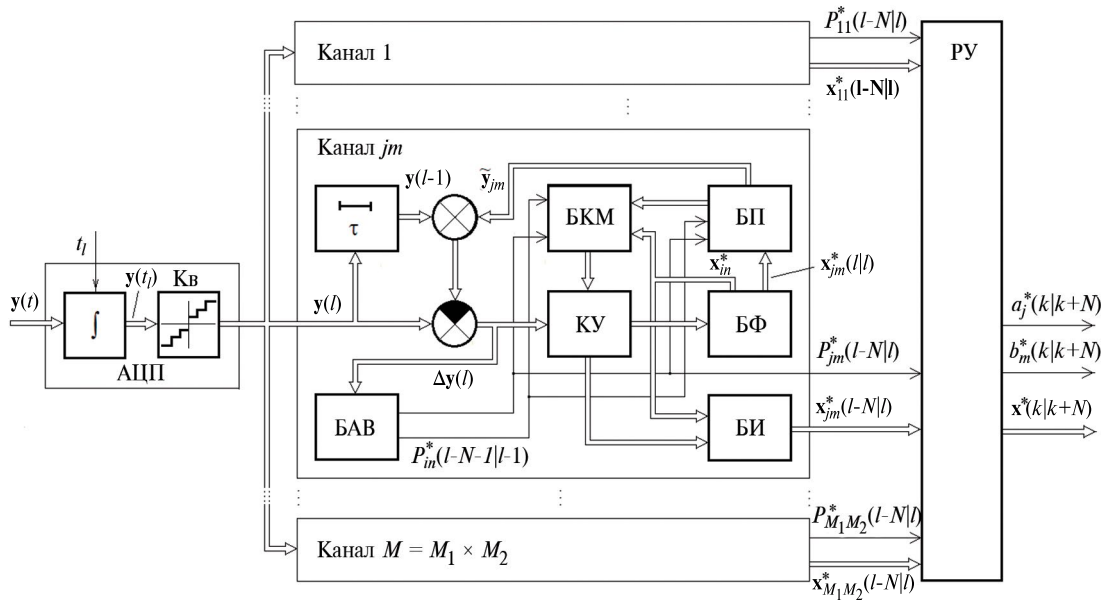


Рис. 1. Структурная схема M -канального цифрового фильтра: Кв — квантователь АЦП; КУ — блок вычисления коэффициентов усиления; БФ — блок фильтрации; БИ — блок интерполяции; БП — блок прогноза; БАВ — блок апостериорных вероятностей; БКМ — блока вычисления корреляционных матриц; РУ — решающее устройство.

D — дальность до цели; $V_{сб}$ — скорость сближения; j — боковое ускорение ОУ.

При этом будем полагать, что цель маневрирует с мгновенными поперечными ускорениями j_F , а ОУ — так, что модуль скорости сближения остается постоянным. Последнее допущение, являясь в общем случае нестрогим, позволяет существенно упростить математические выкладки.

По условию постановки задачи исходное априорное уравнение гауссовского марковского случайного шума измерений $w(t)$ определяется СДУ:

$$dw / dt = -\alpha_w w + \sqrt{2\alpha_w B(k)} \sigma_w^2 \xi_2(t),$$

$$w(0) = w_0, \quad (39)$$

где α_w — коэффициент, характеризующий ширину спектральной плотности шума измерений; σ_w^2 — дисперсия шума измерений; $A(k)$, $B(k)$ — дискретные компоненты ДНМП; $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ — стандартные БГШ. Исходное уравнение наблюдения соответствует (2) для $\mathbf{h} = [1 \ 0 \ 0]$, число интервалов задержки $N = 2$.

Проверка качества квазиоптимального алгоритма ИПЗ проведена с помощью статистического моделирования на ЭВМ для случая, когда цепи Маркова принимают значения $a_1 = 1$, $a_2 = 5$; $b_1 = 1$, $b_2 = 10$. Вероятности перехода $\pi_{11}^a = \pi_{11}^b = 0.9$; $\pi_{12}^a = \pi_{12}^b = 0.1$. В целях повышения наглядности функционирования алгоритма для дискретных

компонент $A(k)$, $B(k)$ были сформированы тестовые последовательности:

$$A(k) = \begin{cases} a_1, & 1 \leq k < 119, 141 \leq k < 159, 161 \leq k < 200, \\ a_2, & 120 \leq k < 140, 160 \leq k < 180. \end{cases}$$

$$B(k) = \begin{cases} b_1, & 1 \leq k < 49, 71 \leq k < 89, 131 \leq k < 200 \\ b_2, & 50 \leq k < 70, 90 \leq k < 130. \end{cases}$$

Определение статистических характеристик квазиоптимальных алгоритмов ИПЗ проводилось методом Монте-Карло по 100 реализациям, при этом тестовые последовательности дискретных цепей Маркова $A(k)$, $B(k)$ сохранялась неизменными, а независимые гауссовские последовательности $\mathbf{n}^{(x)}(l)$, $\mathbf{n}^{(y)}(l)$ формировались с помощью датчика случайных чисел. Для определения оценок дискретного и непрерывного компонентов использовалось решающее правило (35), (36), для которого коэффициенты потерь принимали значения $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Моделирование проводилось при следующих исходных данных: $\tau = 0.2$ с, $\alpha_w = \pi/10$ рад/с, $V_{сб} = V = 300$ отн. ед.; $(0) = 50$ отн. ед., $\sigma_w^2 = 0.01$ отн. ед., $\sigma_{j_{ц}}^2 = 2g$.

Согласно (21), (22) квазиоптимальная интерполяционная оценка $\mathbf{x}_{jm}^*(l-2|l) \equiv \mathbf{x}_{jm}^*(k|k+2)$ отсчетов непрерывных компонент ДНМП $x(t)$ по наблюдаемым сигналам $\mathbf{Y}_1^{k+2} = \{y(1), y(2), \dots, y(k), \dots, y(k+2)\}$ вычислялась из рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{jm}^*(l|l) &= \Phi_j^{(xx)} \mathbf{x}_{jm}^*(l-1|l-1) + \mathbf{k}_{jm}^{(0)}(l) \Delta y_{jm}(l|l-1), \\ \mathbf{x}_{jm}^*(l-1|l) &= \mathbf{x}_{jm}^*(l-1|l-1) + \mathbf{k}_{jm}^{(1)}(l) \Delta y_{jm}(l|l-1), \\ \mathbf{x}_{jm}^*(l-2|l) &= \mathbf{x}_{jm}^*(l-2|l-1) + \mathbf{k}_{jm}^{(2)}(l) \Delta y_{jm}(l|l-1), \\ l &= k+2, \end{aligned}$$

$$\Delta y_{jm}(l|l-1) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} y(t) dt - y(l) - \Phi_j^{(yx)} \mathbf{x}_{jm}^*(l-1|l-1),$$

где оптимальные коэффициенты усиления $\mathbf{k}_{jm}^{(0)}$, $\mathbf{k}_{jm}^{(1)}$, $\mathbf{k}_{jm}^{(2)}$ рассчитывались по формуле (32), матрицы $\Phi_j^{(xx)}$, $\Phi_j^{(yx)}$ – по формулам (8) – (10), $\mathbf{x} = [\varepsilon \ \omega \ j_{\Pi}]^T$.

Результаты моделирования приведены на рис. 2–4. На рис. 2 показаны зависимости от дальности до цели: угловой скорости ЛВ $\omega(k)$, оценки ИПЗ угловой скорости ЛВ $\omega^*(k|k+2)$ и оценки фильтрации угловой скорости ЛВ $\omega^\#(k+2|k+2)$. На рис. 3 представлены зависимости от дальности до цели: совместной вероятности правильного обнаружения изменений статистических характеристик окрашенного шума измерений и маневра ВЦ при ИПЗ P_1^* и при фильтрации P_2^* .

Данные рис. 2, 3 показывают работоспособность квазиоптимального алгоритма ИПЗ при оценке компонент ДНМП при формировании значений угловой скорости ЛВ с учетом скачкообразных маневров цели и изменений

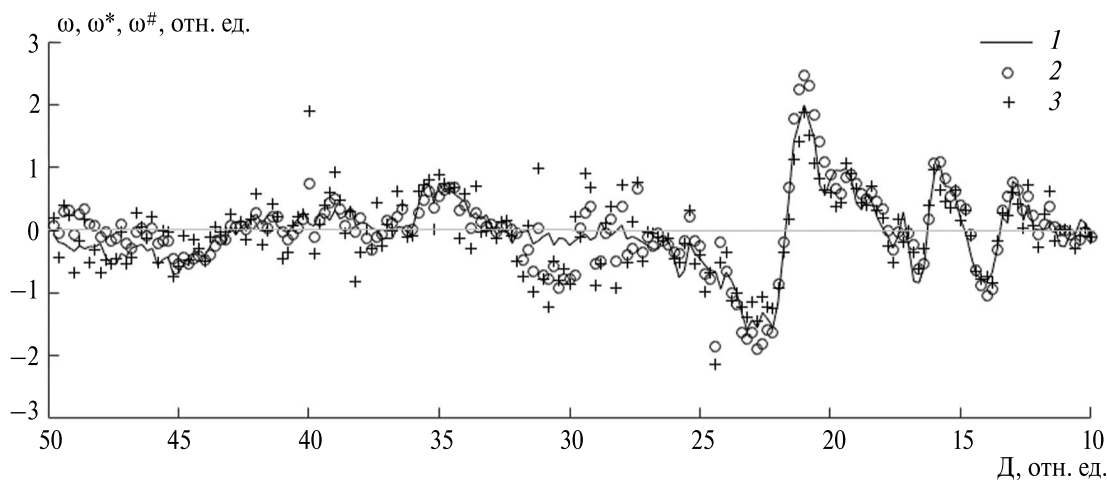


Рис. 2. Зависимости от дальности до цели: угловой скорости ЛВ $\omega(k)$ (кривая 1), оценки ИПЗ угловой скорости ЛВ $\omega^*(k|k+2)$ (кривая 2); оценки фильтрации угловой скорости ЛВ $\omega^\#(k+2|k+2)$ (кривая 3).

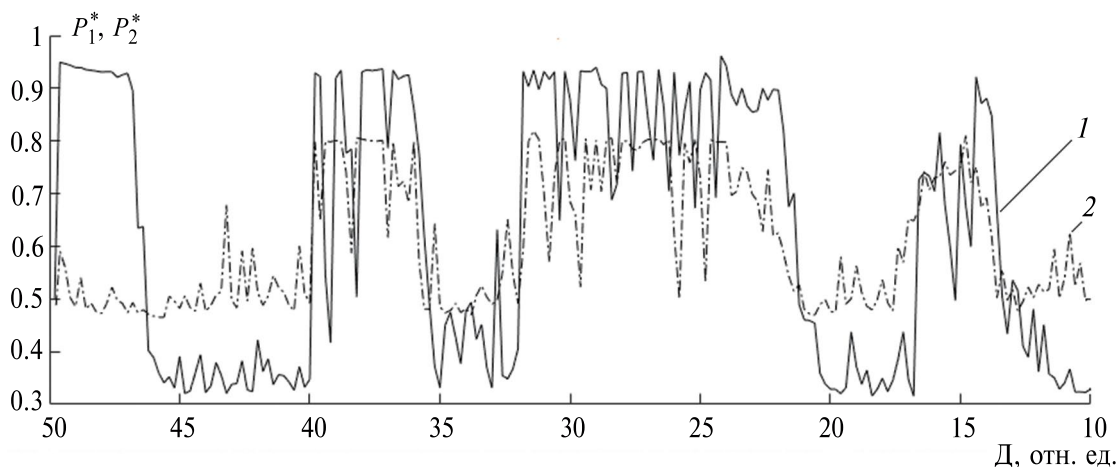


Рис. 3. Зависимость от дальности до цели совместной вероятности правильного обнаружения изменений статистических характеристик окрашенного шума измерений и маневра ВЦ при ИПЗ P_1^* (кривая 1) и при фильтрации P_2^* (кривая 2).

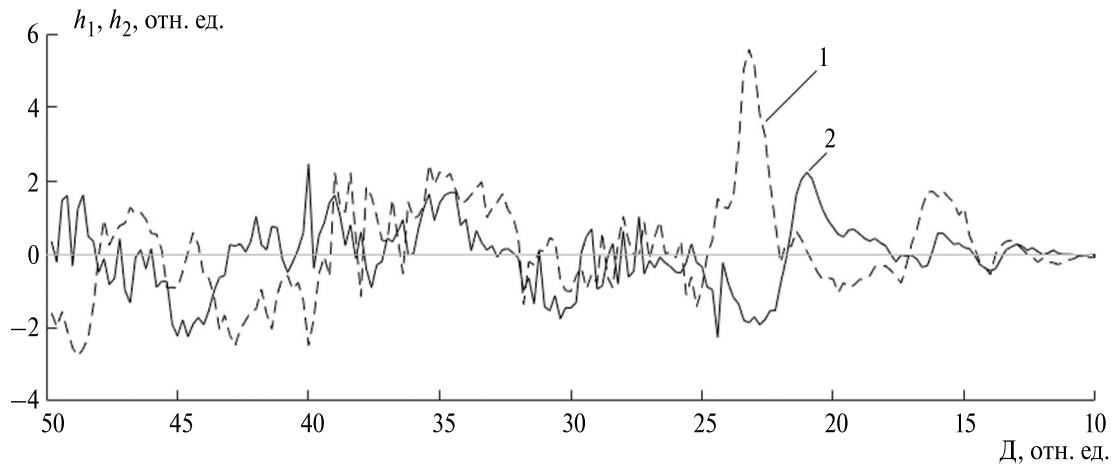


Рис. 4. Зависимости текущего промаха h_1 , h_2 от дальности до цели для случая ИПЗ (кривая 1) и фильтрации (кривая 2).

статистических характеристик окрашенного шума в канале измерений.

По результатам формирования квазиоптимальных оценок компонентов вектора состояния за время наведения вычислялся текущий промах [7]

$$h_1 = \frac{D^2 \omega^*}{V_{сб}}, \quad h_2 = \frac{D^2 \omega^\#}{V_{сб}}.$$

На рис. 4 показаны зависимости текущего промаха h_1 , h_2 от дальности до цели для случая ИПЗ и фильтрации.

Среднее квадратическое отклонение погрешности промаха σ_h на рубеже конечного наведения по 50 последним отсчетам с доверительным интервалом 0.05 отн. ед. составляет:

$\sigma_h = 0.293$ отн. ед. — алгоритм ИПЗ при $N = 2$;

$\sigma_h = 0.752$ отн. ед. — алгоритм фильтрации.

Таким образом, эффективность алгоритма ИПЗ при $N = 2$ составляет более двух раз.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами теории условных марковских процессов решена задача оптимальной интерполяции с постоянным запаздыванием отсчетов непрерывных компонент векторной марковской последовательности ДНМП на фоне коррелированного марковского шума. Синтезированные алгоритмы основаны на использовании метода разностных измерений и разложении смешанной апостериорной плотности вероятности расширенного вектора состояния $[\mathbf{X}^T(l), A(l), B(l)]^T$ и являются алгоритмами с обратными связями по дискретному процессу $\mathbf{S}^T(l) = [A(l), B(l)]$. На базе квазиоптимального

алгоритма разработана соответствующая структурная схема цифрового фильтра.

Синтезированный квазиоптимальный алгоритм интерполяции с постоянным запаздыванием позволяет уменьшить СКО погрешности определения непрерывных компонентов ДНМП в 1.5...2.5 раза и увеличить вероятность правильного распознавания значений дискретных компонентов ДНМП в 1.2... 1.5 раза по сравнению с квазиоптимальным алгоритмом фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
2. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
3. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. М.С. Ярлыкова. М.: Радиотехника, 2004.
4. Sage A.P., Melsa J.L. Estimation Theory with Applications to Communication and Control. N.-Y.: McGraw-Hill, 1971.
5. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
6. Миронов М.А. // РЭ. 1982. Т. 27. № 1. С. 65.
7. Ярлыков М.С., Богачев А.С., Меркулов В.И., Дрогалин В.В. Радиоэлектронные комплексы навигации, прицеливания и управления вооружением. В 2-х тт. Т. 1. Теоретические основы / Под ред. М.С. Ярлыкова. М.: Радиотехника, 2012.

8. Ярлыков М.С., Богачев А.С., Меркулов В.И., Дрога-лин В.В. Радиоэлектронные комплексы навигации, прицеливания и управления вооружением. В 2-х тт. Т. 2. Применение авиационных радиоэлектронных комплексов при решении боевых и навигационных задач / Под ред. М.С. Ярлыкова. М.: Радиотехника, 2012.
9. Ярлыков М.С., Богачев А.С., Миронов М.А. Боевое применение и эффективность авиационных радиоэлектронных комплексов / Под ред. М.С. Ярлыкова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1990.
10. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
11. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
12. Ярлыков М.С., Миронов М.А. // РЭ. 1982. Т. 27. № 10. С. 1949.
13. Детков А.Н. // РЭ. 1997. Т. 42. № 2. С. 177.
14. Миронов М.А. // РЭ. 1992. Т. 37. № 1. С. 107.
15. Миронов М.А. // РЭ. 1993. Т. 38. № 1. С. 141.
16. Величкин А.И. // РЭ. 1990. Т. 35. № 7. С. 1471.
17. Детков А.Н. // РЭ. 2023. Т. 68. № 7. С. 650.
18. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
19. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
20. Детков А.Н. // РЭ. 2022. Т. 67. № 5. С. 485.
21. Руденко Е.А. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. № 1. С. 43.
22. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1978.

OPTIMAL DISCRETE INTERPOLATION WITH CONSTANT DELAY OF SAMPLES OF A DISCRETE-CONTINUOUS MARKOV PROCESS AGAINST A BACKGROUND OF CORRELATED MARKOV NOISE

A. N. Detkov

*State Research Institute of Aviation Systems,
Viktorenko Str., 7, Moscow, 125319 Russia
E-mail: detkov@gosniias.ru*

Received March 19, 2023, revised March 19, 2023, accepted March 25, 2023

The problem of synthesizing optimal and quasi-optimal algorithms for interpolation with constant delay of samples of continuous components of a vector discrete-continuous Markov random process is solved using the methods of the Markov theory of estimation of random processes, taking into account the known statistical characteristics of additive Markov correlated noise. The method of difference measurements was used in the synthesis of algorithms. The structural diagram of the quasi-optimal digital filter is given. A simple example using the method of simulation modeling shows the performance of the quasi-optimal algorithm in statistically uncertain situations when guiding the control object to a maneuvering air target.

Keywords: Markov theory of estimation of random processes, discrete-continuous Markov random process, interpolations with constant delay, Markov correlated noise, method of difference measurements, quasi-optimal digital filter