

УДК 621.391.2

# ОШИБКИ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ ПО ДИСКРЕТНЫМ ПАРАМЕТРАМ ДЛЯ ПРИЕМА И ОБРАБОТКИ ВОС-СИГНАЛОВ В ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМАХ

© 2024 г. М. С. Ярлыков

Редакция журнала “Радиотехника и электроника”,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 27.05.2023 г.

После доработки 14.06.2023 г.

Принята к публикации 25.06.2023 г.

Выполнена оценка потенциальной точности и помехоустойчивости синтезированных на базе марковской теории оценивания с использованием метода с обратными связями по дискретным параметрам квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки шумоподобных сигналов и, в частности, ВОС-сигналов, предназначенных для применения в глобальных навигационных спутниковых системах, таких как GPS (США), Galileo (Евросоюз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). Получены аналитические соотношения для дисперсии квазиоптимальной ошибки оцениваемой случайной фазы и вероятности ошибочного приема дискретного параметра принимаемых ВОС-сигналов. Приведены результаты расчета характеристик точности этих параметров. Построены соответствующие графики.

*Ключевые слова:* ВОС-сигнал, глобальная навигационная спутниковая система, шумоподобный сигнал, апостериорная плотность вероятности, марковская теория оценивания, вероятность ошибочного приема, дисперсия квазиоптимальной ошибки, ГЛОНАСС, Galileo, GPS, BeiDou

DOI: 10.31857/S0033849424080017, EDN: HPCZGG

## ВВЕДЕНИЕ

Функционирование глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС), таких как GPS (США), Galileo (Евросоюз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай), а также региональных спутниковых систем NavIC (Индия) и QZSS (Япония) основано на использовании шумоподобных сигналов (ШПС) [1, 2]. В настоящее время применительно к ГНСС все более широкое распространение получает класс меандровых ШПС – ВОС-сигналов (binary offset carrier modulated signals) [3–6].

Отличительная особенность ВОС-сигналов, которая выделяет их из традиционных ШПС, заключается в наличии в составе модулирующей функции (МФ) меандрового поднесущего колебания (МПК). Длительность меандровых импульсов МПК в  $N_M$  раз короче длительности элемента псевдослучайной последовательности (ПСП) ВОС-сигналов, где  $N_M$  – коэффициент кратности меандровых импульсов [3–6].

На базе марковской теории оценивания (МТО) [7–10] задача структурного синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов с обратными

связями по дискретным параметрам (ДП) для приема и обработки ВОС-сигналов решена в [11, 12].

Структурный синтез в [11, 12] выполнен применительно к марковскому векторному дискретно-непрерывному процессу (ДНП) для случая, когда его непрерывная часть представляет собой векторный диффузионный марковский процесс, а ДП характеризуется простой цепью Маркова на несколько положений.

Важной составной частью разработки синтезированных алгоритмов является анализ их потенциальной точности и помехоустойчивости. Количественной мерой точности и помехоустойчивости таких алгоритмов приемников служат дисперсии оптимальных и квазиоптимальных ошибок оценивания непрерывных параметров (НП) и, в частности, случайной фазы  $\varphi(t)$ , а также вероятность ошибочного приема ДП.

Основной характеристикой, которая определяет точность приемников, является зависимость названных показателей от отношения сигнал/шум на входе приемника.

Для упрощения задачи и простоты описания НП полагаем, что приемник ВОС-сигналов ГНСС

размещается на стационарном объекте, например маяке, морском буе и т.п. При этом НП представляет собой случайную фазу  $\varphi(t)$  принимаемого ВОС-сигнала, описываемую винеровским процессом.

Определение текущих координат объекта, как обычно, в ГНСС основывается на псевдодалномерном беззапросном методе, при котором требуется одновременная видимость минимум четырех навигационных космических аппаратов (НКА) [1, 2]. Кроме того, для вычисления на основе измеренных псевдодалностей прямоугольных координат объекта (например, в системе ПЗ-90 или WGS-84) в приёмнике необходимо располагать служебной информацией (СИ), которая представляет собой для каждого НКА сведения об эфемеридах, альманахе, поправках к бортовой шкале времени (ШВ) и т.д., получаемые с помощью ДП [1, 2]. При этом ДП представляет собой манипулируемую фазу принимаемого ВОС-сигнала  $s(t)$  от какого-либо одного НКА.

В работе рассматриваем упрощенную постановку задачи, при которой полагаем, что принимается сигнал только от одного НКА, а оцениваемые НП и ДП представляют собой скаляры. Как обычно, принимаем, что выполняется оправдываемое практикой ограничение на скорость изменения фазы сигнала  $s(t)$ :  $\tau_{\text{кор}} \gg T$ , где  $\tau_{\text{кор}}$  – время корреляции случайной фазы  $\varphi(t)$ ,  $T$  – длительность тактового интервала ВОС-сигнала  $s(t)$  [7–10]. При такой постановке задачи результаты анализа точности приемников ВОС-сигналов удастся получить в виде аналитических соотношений.

Цель данной работы – на базе МТО с использованием метода синтеза с обратной связью по ДП рассчитать дисперсию квазиоптимальной ошибки оценивания НП  $\varphi(t)$  и вероятность ошибочного приема ДП  $\Theta_k$  применительно к синтезированным квазиоптимальным алгоритмам для приема и обработки ВОС-сигналов приемников ГНСС, а также построить соответствующие графики.

В определенной мере данная работа является продолжением и развитием [11, 12].

В примерах рассматриваются двоичные фазоманипулированные ШПС, используемые в ГНСС типа ГЛОНАСС и GPS, а также sinВОС-сигналы типа ВОС(1,1) и ВОС(10,5), которые применяются GPS и Galileo [3–6].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как отмечали, для упрощения выкладок всюду полагаем, что объект, на котором установлен приемник ГНСС является стационарным. Кроме того, принимаем, что на входе приемника наблюдается ВОС-сигнал от какого-либо одного НКА. В такой постановке наблюдение на входе приемника ГНСС представляет собой аддитивную смесь полезного ВОС-сигнала и шума:

$$\xi(t) = s(t) + n(t), t \in [t_0, t], \quad (1)$$

где  $s(t)$  – принимаемый полезный ВОС-сигнал от НКА на входе приемника ГНСС;  $n(t)$  – аддитивная флуктуационная помеха.

Флуктуационная помеха  $n(t)$ , аппроксимируемая стационарным белым гауссовским шумом (БГШ), имеет статистические характеристики, которые представим в виде

$$M[n(t)] = 0; M[n(t)n(t + \tau)] = \frac{1}{2} N_0 \delta|\tau|, \quad (2)$$

где  $N_0$  – интенсивность БГШ,  $M[\cdot]$  – символ математического ожидания (МО),  $\delta|\tau|$  – дельта-функция.

Принимаемый ВОС-сигнал  $s(t)$  с использованием для передачи СИ двоичной фазовой манипуляции (ФМ) определяется следующим соотношением [4, 6, 11]:

$$s(t) = s(t, \Theta(t_k), \varphi(t)) = A_0 d(t) \cos[\omega_0 t + \Theta(t_k) \pi + \varphi(t)], \quad (3)$$

где  $A_0$  – амплитуда ВОС-сигнала от НКА на входе приемника ГНСС;  $d(t)$  – МФ ВОС-сигнала  $s(t)$ , отражающая специфику навигационных ШПС и собственно ВОС-сигналов;  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – круговая несущая частота ВОС-сигнала;  $f_0$  – несущая частота ВОС-сигнала;  $\Theta_k = \Theta(t_k)$  – ДП, содержащий СИ от НКА;  $\varphi(t)$  – фаза принимаемого ВОС-сигнала  $s(t)$ ;  $t_k = t_0 + kT$  ( $T = \text{const}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Начало отсчета в (3) принято равным  $t_0 = 0$ .

Применительно к (3) имеем, что ДП  $\Theta_k$  представляет собой последовательность двоичных символов длительностью  $T = t_{k+1} - t_k$ . Длительность такта  $T$  ДП  $\Theta_k$  для ГНСС типа GPS, Galileo и ГЛОНАСС равна длительности посылки СИ:  $T = \tau_{\text{СИ}} = 20$  мс [1, 2].

Принимаемый ВОС-сигнал  $s(t)$  (3) можно представить в виде:

$$s(t) = s(t, \Theta(t_k), \varphi(t)) = \begin{cases} s_1(t, \varphi(t)) = A_0 d(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] & \text{при } \Theta_k = \vartheta_1 = 0; \\ s_2(t, \varphi(t)) = -A_0 d(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] & \text{при } \Theta_k = \vartheta_2 = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Видно, что для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  согласно (4) выполняется равенство

$$s_1(t, \varphi(t)) = -s_2(t, \varphi(t)). \quad (5)$$

Полагаем, что ДП  $\Theta_k$  описывается простой симметричной цепью Маркова на два состояния

и может принимать одно из значений  $\vartheta_i$ , где  $i = 1$  или  $2$ , с одношаговыми вероятностями переходов, равными  $1/2$ .

Возможные переходы ДП  $\Theta_k$  из одного состояния в другое являются дискретными и определяются выражением  $t_k = t_0 + kT$ , где  $k = 0, 1, 2$ ,

На каждом тактовом полуинтервале времени  $[t_k, t_{k+1})$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , ДП  $\Theta(t_k)$  остается постоянным и описывается априорным уравнением

$$\frac{d\Theta(t_k)}{dt} = 0, \text{ где } t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Матрица однократных вероятностей перехода и вектор вероятностей начального состояния ДП  $\Theta(t_k)$  известны и соответственно имеют вид [9, 10]:

$$\begin{aligned} \pi(t_k) &= [\pi_{il}(t_k)], \text{ где} \\ \pi_{il}(t_k) &= P\{\Theta(t_k + 0) = \vartheta_l \mid \Theta(t_k - 0) = \vartheta_i\}, \\ & i, l = \overline{1, 2}; \end{aligned}$$

$$P_{\Theta}(t_0) = \begin{bmatrix} P(\Theta = \vartheta_1) \\ P(\Theta = \vartheta_2) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Для двоичных сигналов матрицу однократных вероятностей перехода можно записать:

$$\pi(t_k) = [\pi_{il}(t_k)] = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}, \text{ где } p + q = 1.$$

Часто принимают, что  $p = q = 1/2$ .

Случайная фаза  $\varphi(t)$  принимаемого ВОС-сигнала  $s(t)$  (3) описывается винеровским процессом и определяется уравнением [8–10]

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = n_{\varphi}(t), \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad (8)$$

где  $n_{\varphi}(t)$  – стационарный БГШ с известными характеристиками:

$$M[n_{\varphi}(t)] = 0; M[n_{\varphi}(t)n_{\varphi}(t + \tau)] = \frac{1}{2} N_{\varphi} \delta(|\tau|), \quad (9)$$

$N_{\varphi}$  – односторонняя спектральная плотность фазовых флуктуаций.

Применительно к ГНСС МФ  $d(t)$  у ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) в типовом случае является результатом перемножения двух двоичных последовательностей: собственно ПСП дальномерного кода  $g(t)$  и МПК  $r(t)$  (специфика ВОС-сигналов) [3, 4, 6].

В таком случае МФ  $d(t)$  ВОС-сигнала  $s(t)$  (3) записывается в виде [3, 4, 6]

$$d(t - t_0) = g(t - t_0)r(t - t_0), \quad (10)$$

где  $g(t)$  – ПСП дальномерного кода, характеризующая специфику навигационных ШПС, и  $r(t)$  – МПК, отражающее специфику ВОС-сигналов  $s(t)$ .

Формула, описывающая один период ПСП дальномерного кода  $g(t)$ , имеет вид [1, 2, 6]

$$g(t - t_0) = \sum_{k=0}^{L-1} v_k \text{rect}_{\tau_C} [t - k\tau_C - t_0], \quad (11)$$

где  $L$  – коэффициент расширения спектра, т.е. число элементов на периоде ПСП  $g(t)$ ;  $\tau_C$  – длительность элемента (символа) ПСП  $g(t)$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, (L - 1)$ .

Кодовые коэффициенты  $v_k$ , образующие ПСП дальномерного кода  $g(t)$  (11), принимают на каждом ее элементе длительностью  $\tau_C$  значения  $+1$  или  $-1$  согласно закону чередования элементов на ее периоде. Функция  $\text{rect}_{\tau_C} [\cdot]$  в (11) представляет собой импульс единичной амплитуды и длительностью  $\tau$ :

$$\text{rect}_{\tau_C} [t - k\tau_C] = \begin{cases} 1 & \text{при } k\tau_C \leq t < (k+1)\tau_C; \\ 0 & \text{при } k\tau_C > t \geq (k+1)\tau_C, \end{cases} \text{ где} \\ k = 0, 1, 2, \dots, (L - 1). \quad (12)$$

Частота следования элементов ПСП  $g(t)$  равна  $f_C = 1/\tau_C$ . Для длительности периода ПСП  $g(t)$  (10) выполняется соотношение

$$T_L = L\tau_C. \quad (13)$$

Например, дальномерный код стандартной точности в ГНСС типа ГЛОНАСС представляет собой периодическую последовательность максимальной длины (М-последовательность) с периодом  $T_L = 1$  мс и частотой следования элементов ПСП  $f_C = 511$  кГц [2, 5, 6]. В ГНСС типа GPS дальномерный С/А код является периодической последовательностью Голда с периодом  $T_L = 1$  мс и частотой следования элементов ПСП  $f_C = 1.023$  МГц [2, 5, 6]. У ГНСС ГЛОНАСС длительность элемента ПСП  $g(t)$   $\tau_C \approx 2$  мкс и длительность информационной посылки ДП  $\Theta(t_k)$   $T_L = \tau_{\text{си}} = 20$  мс [1, 2, 6]. У ГНСС Galileo для E1OS сигналов и ГНСС GPS для L1C сигналов длительность элемента ПСП  $g(t)$   $\tau_C \approx 1$  мкс и длительность информационной посылки ДП  $\Theta(t_k)$  равна  $\tau_{\text{си}} = 20$  мс [1, 2, 6].

В формуле (10) МПК  $r(t)$  определяется следующим выражением [3–6]:

$$r(t) = \text{sign}[\sin(\omega_M t)], \quad (14)$$

где  $\omega_M = 2\pi f_M$  – круговая частота МПК  $r(t)$ ,  $f_M = 1/T_M$  – частота МПК  $r(t)$ ,  $T_M = 2\tau_M$  – период МПК,  $\tau_M$  – длительность импульса МПК (меандрового импульса), функция «сигнум»  $z$  равна

$$\text{sign } z = \begin{cases} 1, & z > 0; \\ 0, & z = 0; \\ 1, & z < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Видно, что выполняется соотношение

$$f_M = \frac{1}{2\tau_M}. \quad (16)$$

Различные типы ВОС-сигналов характеризуются коэффициентом кратности меандровых импульсов  $N_M$ , который равен количеству импульсов МПК  $r(t)$ , укладываемых на длительности элемента ПСП  $g(t)$  [3–6]:

$$N_M = \frac{\tau_C}{\tau_M} = \frac{2f_M}{f_C} = \frac{2\alpha}{\beta}, \quad (17)$$

где  $\alpha = \frac{f_M}{f_{оп}}$  и  $\beta = \frac{f_C}{f_{оп}}$  – параметры меандровой модуляции ВОС-сигналов.

На рис. 1 представлены графики МПК  $r(t)$ , ПСП дальномерного кода  $g(t)$  (при произвольно заданной в примере реализации) и МФ  $d(t)$  ВОС-сигналов при коэффициенте кратности меандровых

импульсов  $N_M = 4$ , что соответствует, например, типу меандровой модуляции ВОС(10, 5), характерной для ВОС-сигналов М-кода ГНСС GPS [3, 5].

Оптимальную (квазиоптимальную) оценку фазы  $\varphi(t)$  (8) принимаемого ВОС-сигнала  $s(t)$  (3) получим в соответствии с критерием минимума дисперсии оптимальной (квазиоптимальной) ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$  [10–13].

Применительно к ДП  $\Theta_k$  принимаемого ВОС-сигнала  $s(t)$  (3) пороговый уровень решающего устройства приемника устанавливается таким, чтобы вероятность  $P_{e\theta}$  ошибочного приема двоичных символов ДП  $\Theta_k$  была бы минимальной [10–13].

Таким образом, поставленная задача в соответствии с (1)–(3), (6)–(9) заключается в нахождении ошибок оптимальных (соответствующих квазиоптимальных) оценок компонент векторного марковского ДНП  $[\varphi(t), \Theta(t_k)]^T$ .

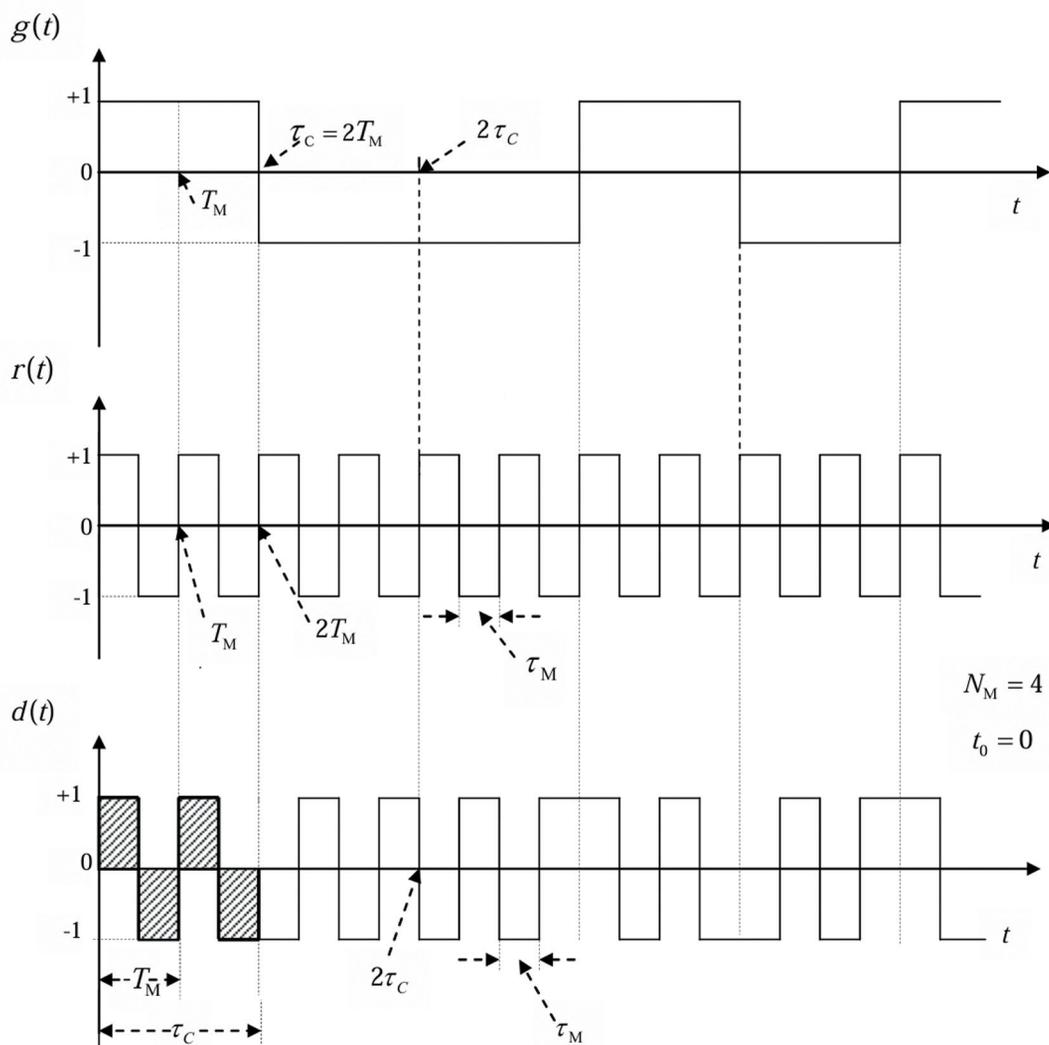


Рис. 1.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ  
И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ  
ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО ПРОЦЕССА  
[ $\varphi(t), \Theta(t_k)$ ]<sup>T</sup>

Задача оптимального оценивания состоит в том, чтобы, имея наблюдение  $\xi(t)$  (1)–(3) и располагая априорными сведениями о ДНП [  $\varphi(t), \Theta(t_k)$  ]<sup>T</sup> (6)–(9), получить оптимальные оценки НП  $\varphi(t)$  и ДП  $\Theta(t_k)$ . Отметим, что в работе всюду каждый вектор представляет собой вектор-столбец.

Оптимальная оценка НП  $\varphi(t)$  должна удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при квадратичной функции потерь [8–10]. Оптимальной оценкой  $\varphi(t)$  случайной фазы  $\varphi(t)$ , удовлетворяющей этому критерию, является ее апостериорное МО:

$$\hat{\varphi}(t) = M_{ps} \{ \varphi(t) \} = \int \varphi p_{ps}(t, \varphi) d\varphi, \quad (18)$$

где

$$p_{ps}(t, \varphi) \triangleq p(t, \varphi | \xi_{t_0}^t) \quad (19)$$

– АПВ случайной фазы  $\varphi(t)$ ;  $\xi_{t_0}^t = \{ \xi(\tau) : \tau \in [t_0, t] \}$  – реализация наблюдения  $\xi(t)$  на отрезке  $[t_0, t]$ .

Если АПВ  $p_{ps}(t, \varphi)$  является унимодальной и гауссовской, то оптимальная оценка  $\hat{\varphi}(t)$  согласно критерию (18) и критерию максимума АПВ совпадают [9, 10, 14], что и используем в дальнейшем.

Оптимальная оценка  $\Theta(t_k)$  ДП  $\Theta(t_k)$  должна удовлетворять критерию минимума апостериорного риска при простой функции потерь, что эквивалентно критерию максимума апостериорной вероятности (АВ) ДП  $\hat{\Theta}(t_k)$  [8–10]:

$$\hat{\Theta}(t_{k+1} - 0) = \vartheta_i : \max_{\vartheta_1 \text{ и } \vartheta_2} \{ P_{ips}(t_{k+1} - 0) \}, \quad (20)$$

где  $P_{ips}(t_{k+1} - 0)$  – АВ состояния ДП  $\Theta(t)$  в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ .

Применительно к методу синтеза с обратными связями по ДП, если в (18) и (19) АПВ  $p_{ps}(t, \varphi)$  принимается гауссовской и выполняются при достаточно высокой апостериорной точности оценивания  $P_{ips}(t_k)$  приближенные равенства

$$P_{ips}(t_k) \approx P_{ips}(t_k | \varphi) \approx P_{ips}(t_k | \hat{\varphi}(t)), \quad (21)$$

то формируются квазиоптимальные оценки НП  $\varphi^*(t)$  и ДП  $\Theta^*(t_k)$  [8–11].

Таким образом, чтобы получить квазиоптимальную оценку фазы  $\varphi^*(t)$ , полагаем, что выполняется условие

$$p_{ps}^*(t, \varphi) = \mathcal{N} \{ \varphi(t) - \varphi^*(t); K(t) \}, \quad (22)$$

где  $\mathcal{N}$  – символ гауссовского закона распределения; звездочка \* означает, что АПВ  $p_{ps}(t, \varphi)$  (19) аппроксимирована гауссовской кривой (22);

$$\varphi^*(t) = M_{ps} \{ \varphi(t) \} = \int \varphi p_{ps}^*(t, \varphi) d\varphi \quad (23)$$

– квазиоптимальная оценка фазы  $\varphi(t)$ :

$$K(t) = M_{ps} \left\{ \left[ \varphi(t) - \varphi^*(t) \right]^2 \right\} = \int \left( \varphi(t) - \varphi^*(t) \right)^2 p_{ps}^*(t, \varphi) d\varphi \quad (24)$$

– апостериорный одномерный центральный момент второго порядка (дисперсия) квазиоптимальной ошибки оцениваемой фазы  $\varphi(t)$ .

Согласно (22) АПВ  $p_{ps}^*(t, \varphi)$  полностью описывается первыми двумя моментами, которые с учетом (1), (3), (6), (8) характеризуются следующими уравнениями [8–10]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^*(t)}{dt} &= K(t) \left. \frac{\partial F_{\Theta}(t, \varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi^*}, \varphi^*(t_0) = \varphi_0; \\ \frac{dK(t)}{dt} &= K^2(t) \left. \frac{\partial^2 F_{\Theta}(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi^*} + \frac{N_{\varphi}}{2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$F_{\Theta}(t, \varphi) = \sum_{i=1}^2 F_i(t, \varphi) P_{ips}(t | \varphi)$$

– производная по времени от усредненного по ДП  $\Theta(t_k)$  парциального ( $i$ -го) логарифма функционала правдоподобия (ЛФП)  $F_i(t, \varphi)$  оцениваемой фазы  $\varphi(t)$ .

Парциальный ( $i$ -й) ЛФП  $\Theta_i(t, \varphi)$  оцениваемой фазы  $\varphi(t)$  равен [9, 11–13]

$$\Phi_i(t, \varphi) = \int_{t_k}^t F_i(\tau, \varphi) d\tau, \text{ где } i = \overline{1, 2}. \quad (26)$$

Для двоичных противоположных ФМ-сигналов (binary phase shift keying signals – BPSK-сигналов) и, в частности, ВОС-сигналов производная по времени от усредненного по ДП  $\Theta(t_k)$  парциального ( $i$ -го) ЛФП  $F_{\Theta}(t, \varphi)$  характеризуется следующей формулой [13]:

$$F_{\Theta}(t, \varphi^*) = F_1(t, \varphi^*) \text{th}\Phi_1(t, \varphi^*), \quad (27)$$

где  $F_1(t, \varphi)$  согласно (1)–(5) и с учетом того, что  $\varphi(t)$  – неэнергетический параметр, определяется на основе следующего выражения [10, 11–13]:

$$F_i(t, \varphi) = \frac{2}{N_0} \xi(t) s_i(t, \varphi(t)), \text{ где } i = \overline{1, 2}, \quad (28)$$

а парциальный ЛФП  $\Phi_1(t, \varphi)$  вычисляется в соответствии с (26).

Видно, что согласно (5) для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  выполняется равенство

$$F_1(t, \varphi) = -F_2(t, \varphi). \quad (29)$$

Квазиоптимальную оценку ДП  $\Theta(t_k)$  сформируем на основе критерия (20).

При этом полагаем, что согласно (21) помимо выполнения условия (22) имеет место приближенное равенство

$$P_{ips}(t_k) \approx P_{ips}(t_k | \varphi^*(t)), \text{ где } i = \overline{1,2}. \quad (30)$$

Решение о квазиоптимальной оценке ДП  $\Theta_{(k+1)}^*$  на  $k$ -м такте, где  $t \in [t_k, t_{k+1})$ , принимается в конце первого этапа обработки, т.е. в момент времени  $t = t_{k+1} - 0$ , согласно критерию (20) с учетом (30):

$$\Theta_{(k+1)}^* = \vartheta_i : \max \left\{ P_{1ps}(t_{k+1} - 0 | \varphi^*(t_{k+1})); P_{2ps}(t_{k+1} - 0 | \varphi^*(t_{k+1})) \right\}. \quad (31)$$

Выражение для квазиоптимальной оценки ДП  $\Theta_{(k+1)}^*(t_{k+1} - 0)$  применительно к приемникам двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) записывается в следующем виде [8, 10, 13–15]:

$$\Theta_{(k+1)}^*(t_{k+1} - 0) = \text{sign} z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0), \quad (32)$$

где

$$z_{\Theta}(t) \triangleq P_{1ps}(t | \varphi) - P_{2ps}(t | \varphi) \quad (33)$$

– разность условных АВ состояния ДП  $\Theta(t_k)$ .

Формула для условных АВ  $P_{ips}(t | \varphi)$  применительно к методу синтеза с обратной связью по ДП имеет вид [11–13]

$$P_{ips}(t | \varphi) = \frac{P_{ips}(t_k + 0 | \varphi) \exp \left[ \int_{t_k}^t F_i(\tau, \varphi) d\tau \right]}{\sum_{l=1}^2 P_{lps}(t_k + 0 | \varphi) \exp \left[ \int_{t_k}^t F_l(\tau, \varphi) d\tau \right]}, \quad (34)$$

где функция  $F_i(t, X_k)$  определяется согласно (28),  $i = \overline{1,2}$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Начальное условие  $P_{ips}(t_k + 0 | \varphi)$  для (33) с учетом (6) и (7) характеризуется соотношением [9, 11–13]:

$$P_{ips}(t_k + 0 | \varphi) =$$

$$= \sum_{m=1}^2 \pi_{mi}(t_k) P_{mps}(t_k - 0 | \varphi), \quad i = \overline{1,2}. \quad (35)$$

В случае квазиоптимальных алгоритмов приема и обработки двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) при равных априорных вероятностях гипотез  $P_{pr}(\Theta(t_k) = \vartheta_1) = P_{pr}(\Theta(t_k) = \vartheta_2) = 1/2$  формула разности условных АВ  $z_{\Theta}(t)$  (33) принимает вид [13]

$$z_{\Theta}(t) = \text{th} \Phi_1(t, \varphi), \quad (36)$$

где  $\Phi_1(t, \varphi)$  определяется согласно (26).

При реализации структур квазиоптимальных приемников обычно алгоритм (36) упрощают, заменяя его приближенным, при котором, в частности, функция  $\text{sign} z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0)$  в (32) принимается той же самой, что и сама случайная величина  $z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0)$ . Приближенный алгоритм формирования квазиоптимальной оценки  $z_{\Theta}^*(t)$  согласно (4), (26), (28) и (36) и с учетом того, что фаза  $\varphi(t)$  является неэнергетическим параметром, характеризуется следующим соотношением [9, 10, 13]:

$$z_{\Theta}^*(t) \approx \Phi_1(t, \varphi^*) \approx \frac{2A_0 d(t)}{N_0} \int_{t_k}^t \xi(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \varphi^*] d\tau. \quad (37)$$

Квазиоптимальная оценка разности условных АВ  $z_{\Theta}^*(t)$  определяет сигнал в приемнике на выходе канала ФМ-сигналов. Процесс  $z_{\Theta}^*(t)$  в моменты времени  $t = t_{k+1} - 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , сравнивается с порогом  $H$  для принятия решения о значениях ДП  $\Theta_{k+1}$ . При двоичных противоположных ФМ-сигналах и, в частности, ВОС-сигналах  $s(t)$  (3) порог равен  $H = 0$ . Тогда применительно к (36) можем записать:

$$z_{\Theta}^*(t) \geq 0. \quad (38)$$

Таким образом, в конце  $k$ -го такта, т.е. при  $t = t_{k+1} - 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , имеем, что на основе (37) квазиоптимальная оценка  $\Theta_{(k+1)}^*(t_{k+1} - 0)$  в (31) определяется соотношением

$$\Theta_{(k+1)}^*(t_{k+1} - 0) = \text{sign} \frac{2A_0 d(t)}{N_0} \int_{t_k}^{t_{k+1}-0} \xi(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \varphi^*] d\tau \quad (39)$$

3. ДИСПЕРСИЯ КВАЗИОПТИМАЛЬНОЙ ОШИБКИ ОЦЕНИВАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ФАЗЫ  $\varphi(t)$

Важную характеристику точности и помехоустойчивости приемника представляет собой зависимость дисперсии квазиоптимальной ошибки оценивания случайной фазы  $\varphi(t)$  принимаемого ВОС-сигнала  $s(t)$  (3) от отношения сигнал/шум

$$q_{\tau_M} = \frac{A_0^2 \tau_M}{N_0}, \quad (40)$$

где  $\tau_M$  – длительность импульса МПК (14).

Для вычисления дисперсии квазиоптимальной ошибки оценивания случайной фазы  $\varphi(t)$  применим метод временного усреднения [8–10] к уравнению для второго момента (25) АПВ  $p_{ps}(t, \varphi)$ . В таком случае принимаем, что

$$\overline{K(t)} \triangleq \sigma_{\varphi ps}^2, \quad (41)$$

где черта сверху означает символ временного усреднения.

С учетом (41) уравнение (25) принимает вид

$$\sigma_{\varphi ps}^4 \frac{\partial^2 F_{\Theta}(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi^*} + \frac{N_{\varphi}}{2} = 0. \quad (42)$$

На основании (42) находим, что дисперсия квазиоптимальной ошибки оценивания случайной фазы  $\varphi(t)$  равна

$$\sigma_{\varphi ps}^2 = \sqrt{-\frac{N_{\varphi}}{2 \frac{\partial^2 F_{\Theta}(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi^*}}}. \quad (43)$$

Известно, что для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) выполняется следующее соотношение [13]:

$$\frac{\partial^2 F_{\Theta}(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi^*} = -F_{\Theta}(t, \varphi) \Big|_{\varphi=\varphi^*}, \quad (44)$$

где производная по времени от усредненного по ДП  $\Theta(t_k)$  частичного ( $i$ -го) ЛФП  $F_{\Theta}(t, \varphi)$  определяется согласно (27).

С учетом (44) формула, характеризующая дисперсию  $\sigma_{\varphi ps}^2$  (43), принимает вид

$$\sigma_{\varphi ps}^2 = \sqrt{\frac{N_{\varphi}}{2 F_{\Theta}(t, \varphi^*)}}. \quad (45)$$

В соответствии с (27) дисперсия  $\sigma_{\varphi ps}^2$  квазиоптимальной ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$  применительно к двоичным противоположным ФМ-сигналам и, в частности, к ВОС-сигналам  $s(t)$  (3) равна

$$\sigma_{\varphi ps}^2 = \sqrt{\frac{N_{\varphi}}{2 F_1(t, \varphi^*) \operatorname{th} \Phi_1(t, \varphi^*)}}, \quad (46)$$

где функции  $\Phi_1(t, \varphi^*)$  и  $F_1(t, \varphi^*)$  характеризуются согласно (26) и (28).

На основании (46), выполнив преобразования согласно (26)–(28), получим, что для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) дисперсия  $\sigma_{\varphi ps}^2$  квазиоптимальной ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$  характеризуется следующим соотношением:

$$\sigma_{\varphi ps}^2 = \sqrt{\frac{D_{\varphi \tau_C}}{q_{\tau_C} \operatorname{th} q_{\tau_C}}}, \quad (47)$$

где 
$$D_{\varphi \tau_C} = \frac{N_{\varphi} \tau_C}{2} \quad (48)$$

– дисперсия набега случайной фазы  $\varphi(t)$  за длительность  $\tau_C$  элемента ПСП  $g(t)$  (см. рис. 1);

$$q_{\tau_C} = \frac{A_0^2 \tau_C}{N_0} \quad (49)$$

– отношение удвоенной энергии элементарного импульса ПСП  $g(t)$  к спектральной плотности БГШ (отношение сигнал/шум);  $\operatorname{th}$  – символ гиперболического тангенса.

Отметим, что, поскольку выполняется равенство  $\tau_C = N_M \tau_M$ , то для параметров  $q_{\tau_M}$  (40) и  $q_{\tau_C}$  (49) имеет место формула связи:

$$q_{\tau_C} = N_M q_{\tau_M} \quad (50)$$

Применительно к ВОС-сигналам формулу (37), характеризующую дисперсию  $\sigma_{\varphi ps}^2$  квазиоптимальной ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$ , с учетом (50) удобнее использовать в несколько иной форме:

$$\sigma_{\varphi ps}^2 = \sqrt{\frac{D_{\varphi \tau_C}}{N_M q_{\tau_M} \operatorname{th}(N_M q_{\tau_M})}}, \quad (51)$$

где  $N_M$ ,  $q_{\tau_M}$  и  $D_{\varphi \tau_M}$  определяются в соответствии с (17), (40) и (48).

В иллюстрирующих примерах при расчетах было принято [1, 2, 6]:

$$\tau_C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с}, \quad T_L = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с} \text{ и } L = 10^4.$$

Результаты вычислений согласно (51) и построение с помощью пакета прикладных программ MathCAD соответствующих графиков дисперсии  $\sigma_{\varphi ps}^2$  квазиоптимальной ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$  ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) в зависимости от отношения сигнал/шум  $q_{\tau_M}$  для нескольких значений параметров  $N_M$  и  $D_{\varphi \tau_C}$  представлены на рис. 2–4.

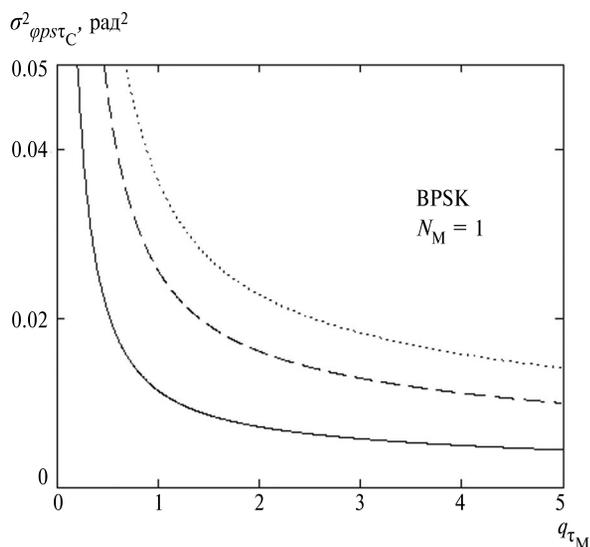


Рис. 2.

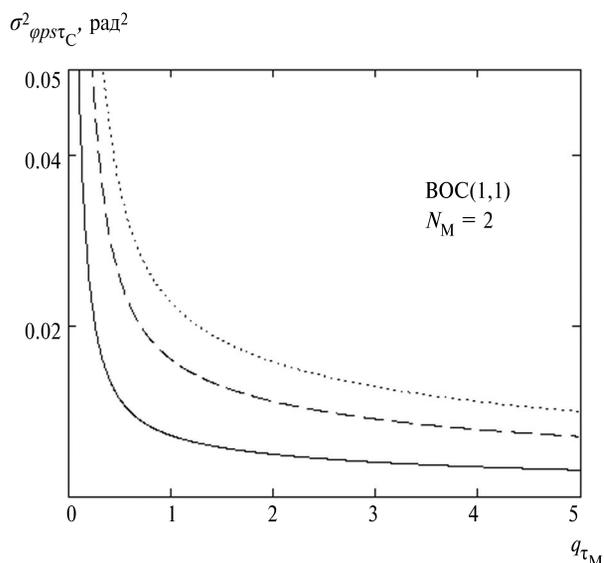


Рис. 3.

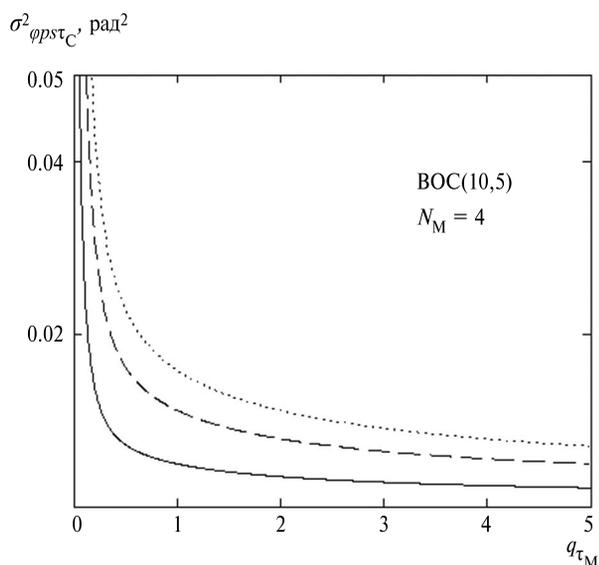


Рис. 4.

Графики на рис. 2 характеризуют случай выродившихся ВОС-сигналов с коэффициентом кратности  $N_M=1$ , т.е. с меандровой модуляцией, например, типа ВОС(1,2), когда меандровые сигналы трансформируются в обычные ФМ ШПС с модуляцией типа BPSK. Представлены графики для  $D_{\varphi\tau_C} = 10^{-4}$  (сплошная линия),  $D_{\varphi\tau_C} = 5 \cdot 10^{-4}$  (штриховая),  $D_{\varphi\tau_C} = 10^{-3}$  (пунктирная).

На рис. 3 представлены графики ВОС-сигналов с коэффициентом кратности меандровых импульсов  $N_M = 2$ , т.е. с меандровой модуляцией,

например, типа ВОС(1,1). Представлены графики для  $D_{\varphi\tau_C} = 10^{-4}$  (сплошная линия),  $D_{\varphi\tau_C} = 5 \cdot 10^{-4}$  (штриховая),  $D_{\varphi\tau_C} = 10^{-3}$  (пунктирная).

На рис. 4 показаны графики ВОС-сигналов с коэффициентом кратности  $N_M=4$ , т.е. с меандровой модуляцией, например, типа ВОС(10,5). Представлены графики для  $D_{\varphi\tau_C} = 10^{-4}$  (сплошная линия),  $D_{\varphi\tau_C} = 5 \cdot 10^{-4}$  (штриховая),  $D_{\varphi\tau_C} = 10^{-3}$  (пунктирная).

На основе (51) и анализа графиков на рис. 2–4 количественно оценено уменьшение ошибки оценивания случайной фазы  $\varphi(t)$  с ростом отношения сигнал/шум на входе приемника.

При фиксированном отношении сигнал/шум  $q_{\tau_M}$  ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$  сигнала  $s(t)$  (3) растут с увеличением значения параметра  $D_{\varphi\tau_C}$ , что отражает значимость повышения стабильности частоты задающего генератора.

#### 4. ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБОЧНОГО ПРИЕМА ДИСКРЕТНОГО ПАРАМЕТРА $\Theta(t_k)$

Вероятность ошибочного приема  $P_{e\Theta}(t)$  информационного ДП  $\Theta(t_k)$  определяется на основе анализа статистических характеристик случайного процесса  $z_{\Theta}^*(t)$  (37) и (38), наблюдаемого на выходе канала ФМ приемника ВОС-сигналов ГНСС.

Как известно [8, 10, 14], вероятность ошибочного приема  $P_{e\Theta}$  определяется в соответствии с формулой полной вероятности:

$$P_{e\Theta} = \sum_{i=1}^2 P_{pri} P_{e\Theta i}, \quad (52)$$

где  $P_{pri} = P_{pr}(\Theta = \vartheta_i)$  – априорная вероятность того, что  $\Theta = \vartheta_i, i = 1, 2, \vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 1$ ;  $P_{e\Theta 1} \triangleq P(s_2/s_1)$  – условная вероятность ошибки, когда принимается решение, что наблюдается сигнал  $s_2 = s(t, \varphi(t), \Theta_k = \vartheta_2 = 1)$ , при наличии в реализации  $\xi(t)$  в действительности сигнала  $s_1 = s(t, \varphi(t), \Theta_k = \vartheta_1 = 0)$ ;  $P_{e\Theta 2} \triangleq P(s_1/s_2)$  – условная вероятность ошибки, когда принимается решение, что наблюдается сигнал  $s_1 = s(t, \varphi(t), \Theta_k = \vartheta_1 = 0)$ , при наличии в реализации  $\xi(t)$  в действительности сигнала  $s_2 = s(t, \varphi(t), \Theta_k = \vartheta_2 = 1)$ . В формуле (52) сигналы  $s_1$  и  $s_2$  определяются согласно (4).

Видно, что условная вероятность  $P_{e\Theta 1}$  характеризует собой ошибку 2-го рода (ложный сигнал), а условная вероятность  $P_{e\Theta 2}$  является ошибкой 1-го рода (пропуск сигнала).

Для типового частного случая, когда гипотезы априорно равновероятны, т.е.  $P_{pr1} = P_{pr2} = 1/2$ , формула (52) вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta}$  принимает вид

$$P_{e\Theta} = \frac{1}{2}(P_{e\Theta 1} + P_{e\Theta 2}). \quad (53)$$

Поскольку принимаемый ВОС-сигнал  $s(t, \Theta(t_k), \varphi(t))$  (3) зависит как от ДП  $\Theta(t_k)$ , так и от НП  $\varphi(t)$ , то для вычисления вероятностей  $P_{e\Theta 1}$  и  $P_{e\Theta 2}$  в (52) необходимо исключить их зависимость от фазы  $\varphi(t)$ . Для этого усредним вероятности  $P_{e\Theta i}(\varphi)$ , где  $i = 1, 2$ , по АПВ случайной фазы  $\varphi(t)$  [10, 13]:

$$P_{e\Theta i} = M_{ps} \{P_{e\Theta i}(\varphi)\} = \int P_{e\Theta i}(\varphi) p_{ps}(t, \varphi) d\varphi, \quad (54)$$

где  $i = \overline{1, 2}$ ,  $p_{ps}(t, \varphi) \triangleq p(t, \varphi | \xi_{t_0}^t)$  – АПВ случайной фазы  $\varphi(t)$ .

Если на  $k$ -м такте, т.е.  $t \in [t_k, t_{k+1} - 0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , в принятом ВОС-сигнале  $s(t, \Theta(t_k), \varphi(t))$  (4) ДП  $\Theta_k = \vartheta_1 = 0$ , то соответствующую этому случаю случайную величину  $z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0)$  (33) и (37) обозначим как  $z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0) \triangleq z_1^*$ .

Плотность вероятности гауссовской случайной величины  $z_1^*$  при фиксированном значении фазы  $\varphi(t)$  имеет вид [8, 10, 13, 14]

$$p(z_1^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z(\varphi)} \exp\left\{-\frac{(z_1^* - m_1(\varphi))^2}{2\sigma_z^2(\varphi)}\right\}, \quad (55)$$

где

$$m_1(\varphi) = M[z_1^*] = \int_{-\infty}^{\infty} z_1^* p(z_1^*) dz_1^* \quad (56)$$

– условное (по  $\varphi(t)$ ) МО случайной величины  $z_1^*$ ,

$$\sigma_z^2(\varphi) = M[z_1^{*2}] - m_1^2(\varphi) \quad (57)$$

– дисперсия случайной величины  $z_1^*$ .

Если на  $k$ -м такте, т.е.  $t \in [t_k, t_{k+1} - 0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , в принятом ВОС-сигнале  $s(t, \Theta(t_k), \varphi(t))$  (4) ДП  $\Theta_k = \vartheta_2 = 1$ , то соответствующую этому случаю случайную величину  $z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0)$  (33) и (37) обозначим как  $z_{\Theta}^*(t_{k+1} - 0) \triangleq z_2^*$ .

Плотность вероятности гауссовской случайной величины  $z_2^*$  при фиксированном значении фазы  $\varphi(t)$  имеет вид [8, 10, 13, 14]

$$p(z_2^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z(\varphi)} \exp\left\{-\frac{(z_2^* - m_2(\varphi))^2}{2\sigma_z^2(\varphi)}\right\} \quad (58)$$

где

$$m_2(\varphi) = M[z_2^*] = \int_{-\infty}^{\infty} z_2^* p(z_2^*) dz_2^* \quad (59)$$

– условное (по  $\varphi(t)$ ) МО случайной величины  $z_2^*$ ,  $\sigma_z^2(\varphi) = M[z_2^{*2}] - m_2^2(\varphi)$  – дисперсия случайной величины  $z_2^*$ . (60)

Как известно [8, 10, 13], дисперсии случайных величин  $z_1^*$  и  $z_2^*$  равны друг другу и являются безусловными по фазе  $\varphi(t)$ , т.е.

$$\sigma_z^2(\varphi) = \sigma_z^2. \quad (61)$$

В соответствии с (1) и (37) для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) условные МО  $m_i(\varphi)$ , где  $i = 1, 2$ , и дисперсия  $\sigma_z^2$  случайных величин  $z_1$  и  $z_2$  имеют вид [8, 10, 13]:

$$m_i(\varphi) = \frac{2}{N_0} \int_{t_k}^{t_{k+1}} s_i(t, \varphi) s_1(t, \varphi^*) dt, \text{ где } i = \overline{1, 2}; \quad (62)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{2}{N_0} \int_{t_k}^{t_{k+1}} s_1^2(t, \varphi^*) dt. \quad (63)$$

Условные вероятности ошибок  $P_{e\Theta 1}$  и  $P_{e\Theta 2}$  согласно (55) и (58) характеризуются следующими соотношениями [8, 10, 13]:

$$P_{e\Theta 1} = \int_{-\infty}^H p(z_1^*) dz_1^* \text{ и } P_{e\Theta 2} = \int_H^{\infty} p(z_2^*) dz_2^*,$$

где  $H$  – порог принятия решения, выбираемый из условия минимума вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta}$ .

Согласно (53), (55), (58) и (61) вероятность ошибочного приема  $P_{e\Theta}$  может быть представлена в виде

$$P_{e\Theta} = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^H p(z_1^*) dz_1^* + \int_H^{\infty} p(z_2^*) dz_2^* \right] = \frac{1}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{H - m_1(\varphi)}{\sigma_z}\right) + \left[1 - \Phi\left(\frac{H - m_2(\varphi)}{\sigma_z}\right)\right] \right\}, \quad (64)$$

где

$$\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (65)$$

– интеграл вероятности Гаусса (функция гауссовского распределения).

При написании (64) учтено, что для интеграла вероятности Гаусса выполняется соотношение

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z). \quad (66)$$

Таким образом, формула (65) для вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta}$  (53) имеет вид

$$P_{e\Theta} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{H - m_1(\varphi)}{\sigma_z}\right) - \Phi\left(\frac{H - m_2(\varphi)}{\sigma_z}\right) \right]. \quad (67)$$

Выбирая порог  $H$  из условия минимума вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta}$  и решив уравнение  $\frac{\partial P_{e\Theta}}{\partial H} = 0$ , получим, что

$$H_{\text{опт}} = \frac{m_1(\varphi) + m_2(\varphi)}{2}. \quad (68)$$

В соответствии с (66)–(68) минимальное значение вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta \min}$  равно

$$P_{e\Theta \min} = 1 - \Phi\left(\frac{m_1(\varphi) - m_2(\varphi)}{2\sigma_z}\right), \quad (69)$$

где  $\Phi(z)$  – интеграл вероятности Гаусса (65).

Для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) на основании (4) и (37), находим, что

$$m_1(\varphi) = -m_2(\varphi). \quad (70)$$

В таком случае согласно (55) имеем

$$H_{\text{опт}} = 0. \quad (71)$$

Перейдем в (69) от условных (по фазе  $\varphi(t)$ ) МО  $m_i(\varphi)$  к соответствующим безусловным МО случайных величин  $z_1^*$  и  $z_2^*$ :

$$M_i \triangleq M_{ps} \{m_i(\varphi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} m_i(\varphi) p_{ps}(t, \varphi) d\varphi, \quad (72)$$

где  $p_{ps}(t, \varphi) \triangleq p(t, \varphi | \xi_{i0}^t)$  – АПВ случайной фазы  $\varphi(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Согласно (62) и (72) можем записать

$$M_1 = \frac{2T_L}{N_0} M_{ps} \left\{ s(t, \Theta_k = \vartheta_1, \varphi) \left[ s(t, \Theta_k = \vartheta_1, \varphi^*) - s(t, \varphi(t), \Theta_k = \vartheta_2, \varphi^*) \right] \right\}; \quad (73)$$

$$M_2 = \frac{2T_L}{N_0} M_{ps} \left\{ s(t, \Theta_k = \vartheta_2, \varphi) \left[ s(t, \Theta_k = \vartheta_1, \varphi^*) - s(t, \varphi(t), \Theta_k = \vartheta_2, \varphi^*) \right] \right\}. \quad (74)$$

Для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) на основании (5) и (62), находим, что формулы (73) и (74) безусловных МО случайных величин  $z_1$  и  $z_2$  принимают вид

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{4T_L}{N_0} M_{ps} \left[ s_1(t, \varphi) s_1(t, \varphi^*) \right] = \\ &= 2q_{T_L} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi ps}^2}{2}\right); \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{4T_L}{N_0} M_{ps} \left[ s_1(t, \varphi) s_1(t, \varphi^*) \right] = \\ &= -2q_{T_L} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi ps}^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (76)$$

где

$$q_{T_L} = \frac{A_0^2 T_L}{N_0} \quad (77)$$

– отношение удвоенной энергии сигнала на длительности тактового интервала  $T_L$  к односторонней

спектральной плотности  $N_0$  БГШ  $n(t)$  на входе приемника (отношение сигнал/шум);  $\sigma_{\varphi ps}^2$  – дисперсия квазиоптимальной ошибки оценивания фазы  $\varphi(t)$  (47).

Отметим, что между параметрами, характеризующими отношение сигнал/шум  $q_{\tau_M}$  (40),  $q_{\tau_C}$  (49) и  $q_{T_L}$  (77), имеется взаимосвязь:

$$q_{T_L} = L q_{\tau_C} = L N_M q_{\tau_M}. \quad (78)$$

Известно, что при малых ошибках обработки сигналов приближенно выполняются равенства [10, 13, 14]

$$m_i(\varphi) \approx M_i, \text{ где } i = \overline{1, 2}. \quad (79)$$

Учитывая (79), можно записать, что минимальное значение вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta \min}$  (69) равно

$$P_{e\Theta \min} = 1 - \Phi\left(\frac{M_1 - M_2}{2\sigma_z}\right), \quad (80)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  определяются согласно (75) и (76),  $\Phi(z)$  – интеграл вероятности Гаусса (65).

Для двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) в соответствии с (70) и (79) имеем, что

$$M_1 = -M_2. \quad (81)$$

Согласно (81) минимальное значение вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta \min}$  (80) равно

$$P_{e\Theta \min} = 1 - \Phi\left(\frac{M_1}{\sigma_z}\right), \quad (82)$$

где  $M_1$  характеризуется (75).

Дисперсия  $\sigma_z^2$  случайных величин  $z_1^*$  и  $z_2^*$  применительно к двоичным противоположным ФМ-сигналам и, в частности, ВОС-сигналам  $s(t)$  (3) на основании (63) характеризуется следующим выражением:

$$\sigma_z^2 = \frac{8T_L}{N_0} M_{ps} \left[ s_1^2(t, \varphi^*) \right] = 4q_{TL}, \quad (83)$$

где  $q_{TL}$  определяется (77).

Итоговое выражение (82) для вероятности  $P_{e\Theta \min}$  ошибочного приема двоичных противоположных ФМ-сигналов и, в частности, ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) согласно (75) и (83) записывается в виде

$$P_{e\Theta \min} = 1 - \Phi\left[\sqrt{q_{TL}} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi ps T_L}^2}{2}\right)\right], \quad (84)$$

где параметр  $q_{TL}$  определяется (77).

В формуле (84) дисперсию  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2$  квазиоптимальной ошибки оценивания случайной фазы  $\phi(t)$  следует рассматривать на длительности тактового интервала  $T_L$  (интервал дискретизации ДП  $\Theta(t_k)$ ), т.е. в несколько иной форме по сравнению с (47) и (57):

$$\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = \sqrt{\frac{D_{\varphi T_L}}{q_{TL} \text{th} q_{TL}}} = \sqrt{\frac{D_{\varphi \tau_C}}{q_{\tau_C} \text{th}(Lq_{\tau_C})}}, \quad (85)$$

где

$$D_{\varphi T_L} = \frac{N_{\varphi} T_L}{2} = L \frac{N_{\varphi} \tau_C}{2} = LD_{\varphi \tau_C},$$

$$q_{TL} = Lq_{\tau_C} = LN_M q_{\tau_M}$$

Применительно к ВОС-сигналам итоговую формулу (84) для вероятности ошибочного приема  $P_{e\Theta \min}$  с учетом (78) удобнее использовать в виде

$$P_{e\Theta \min} = 1 - \Phi\left[\sqrt{LN_M q_{\tau_M}} \exp\left(-\frac{\sigma_{\varphi ps T_L}^2}{2}\right)\right], \quad (86)$$

где  $q_{\tau_M}$  определяется согласно (40).

Результаты вычислений в соответствии с (86) и построение с помощью пакета прикладных

программ MathCAD соответствующих графиков вероятности  $P_{e\Theta \min}$  ошибочного приема ДП  $\Theta(t_k)$  ВОС-сигналов  $s(t)$  (3) в зависимости отношения сигнал/шум  $q_{\tau_M}$  для нескольких значений параметров  $N_M$  и  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2$  представлены на рис. 5–7.

Графики на рис. 5 представляют случай выродившихся ВОС-сигналов с коэффициентом кратности  $N_M = 1$ , т.е. с меандровой модуляцией, например, типа ВОС(1, 2), когда меандровые сигналы трансформируются в обычные ФМ ШПС с модуляцией типа BPSK. Представлены графики для  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 0.5 \text{ рад}^2$  (сплошная линия),  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 1 \text{ рад}^2$  (штриховая) и  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 1.5 \text{ рад}^2$  (пунктирная).

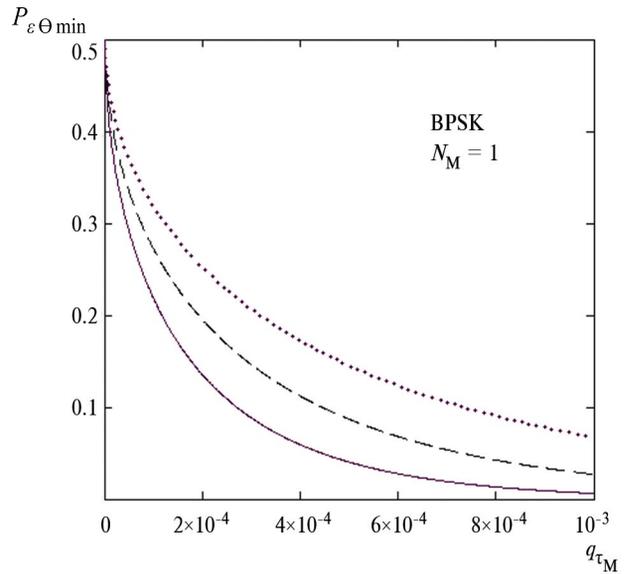


Рис. 5.

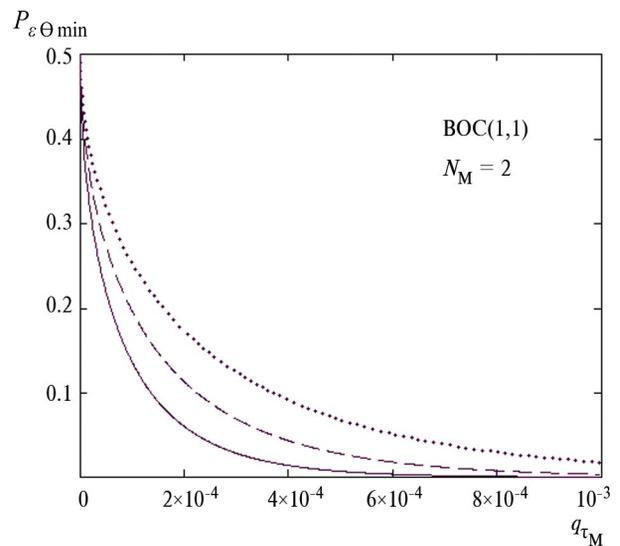


Рис. 6.

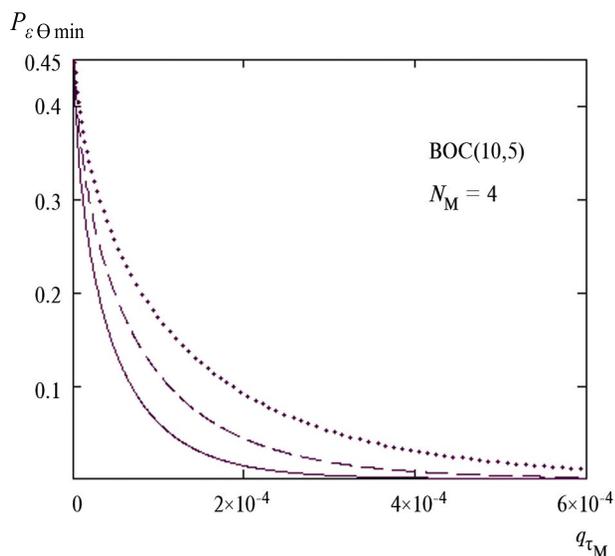


Рис. 7.

На рис. 6 изображены графики ВОС-сигналов с коэффициентом кратности меандровых импульсов  $N_M = 2$ , т.е. с меандровой модуляцией, например, типа ВОС(1,1). Представлены графики для  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 0.5 \text{ рад}^2$  (сплошная линия),  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 1 \text{ рад}^2$  (штриховая) и  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 1.5 \text{ рад}^2$  (пунктирная).

На рис. 7 представлены графики ВОС-сигналов с коэффициентом кратности  $N_M = 4$ , т.е. с меандровой модуляцией, например, типа ВОС(10,5). Представлены графики для  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 0.5 \text{ рад}^2$  (сплошная линия),  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 1 \text{ рад}^2$  (штриховая) и  $\sigma_{\varphi ps T_L}^2 = 1.5 \text{ рад}^2$  (пунктирная).

На основе (86) и рассмотрения графиков рис. 5–7 получена количественная оценка повышения точности и помехоустойчивости приема ДП  $\Theta(t_k)$  различного типа ВОС-сигналов в зависимости от роста отношения сигнал/шум на входе приемника ГНСС, а также от улучшения точности фильтрации фазы  $\varphi(t)$  сигнала  $s(t)$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены точность и помехоустойчивость квазиоптимальных алгоритмов для приема и обработки навигационных ШПС и, в частности, ВОС-сигналов (меандровых ШПС), которые предназначены для применения в современных и перспективных ГНСС, таких как GPS (США), Galileo (Евросоюз), ГЛОНАСС (Россия) и BeiDou (Китай). Алгоритмы разработаны на базе МТО векторных случайных ДНП на основе метода синтеза с обратными связями по ДП.

Основной научный результат работы состоит в том, что получены аналитические выражения для расчета дисперсии квазиоптимальной ошибки

оценивания случайной фазы  $\varphi(t)$  и вероятности ошибочного приема ДП  $\Theta(t_k)$  принимаемых ВОС-сигналов, выполнены расчеты и построены соответствующие графики.

Предложенная в работе методика решения задачи применима и для тех режимов функционирования ГНСС, при которых пока используются не ВОС-сигналы, а традиционные ШПС.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1993.
2. Соловьев Ю. А. Спутниковая навигация и её приложения. М.: Эко-Трендз, Москва, 2003.
3. Betz J.W. // Proc. National Technical Meeting of the Institute of Navigation (ION – NTM'99), San Diego 25-27 Jan. Fairfax: ION, 1999. P. 639.
4. Betz J.W. // Navigation J. ION. 2001. V. 48. № 4. P. 227.
5. Lachapelle G., Petovello M. // Inside GNSS. 2006. V. 1. № 4. P. 22.
6. Ярлыков М. С. Меандровые шумоподобные сигналы (ВОС-сигналы) и их разновидности в спутниковых радионавигационных системах. М.: Радиотехника, 2017.
7. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
8. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1980.
9. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
10. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный приём сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
11. Ярлыков М.С. // РЭ. 2021. Т. 66. № 1. С. 39.
12. Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М. // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 733.
13. Ярлыков М.С., Ярлыкова С.М. // РЭ. 2004. Т. 49. № 8. С. 934.
14. Чердынцев В.А. Статистическая теория совмещенных радиотехнических систем. Минск, Вышш. школа, 1980.

# ERRORS OF QUASI-OPTIMAL ALGORITHMS WITH FEEDBACKS ON DISCRETE PARAMETERS FOR RECEIVING AND PROCESSING BOC SIGNALS IN ADVANCED GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEMS

**M. S. Yarlykov**

*Editorial office of the Journal «Radiotechnika and Electronika»*

*Mokhovaya Str., 11, Build 7, Moscow, 125009 Russia*

*E-mail: red@cplire.ru*

Received May 27, 2023, revised June 14, 2023, accepted June 26, 2023

An assessment of the potential accuracy and noise immunity of quasi-optimal algorithms for receiving and processing noise-like signals, in particular BOC signals, designed for use in global navigation satellite systems such as GPS (USA), Galileo (EU), GLONASS (Russia) and BeiDou (China), synthesized on the basis of Markov estimation theory using a method with feedback on discrete parameters, was carried out. Analytical relationships for the variance of the quasi-optimal error of the estimated random phase and the probability of erroneous reception of the discrete parameter of the received BOC signals are obtained. The results of calculating the accuracy characteristics of these parameters are presented. The corresponding graphs are constructed.

*Keywords:* BOC signal, global navigation satellite system, noise-like signal, a posteriori probability density, Markov estimation theory, probability of erroneous reception, variance of quasi-optimal error, GLONASS, Galileo, GPS, BeiDou