

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 550.388.2

ЗАВИСИМОСТЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СОЛИТОНОВ ОТ ТИПА НЕЛИНЕЙНОСТИ¹

© 2024 г. В. А. Еременко, Н. И. Манаенкова*

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН (ИЗМИРАН),
Калужское шос., 4, Москва, 108840 Российская Федерация*

**E-mail: nat_man@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.07.2023 г.

После доработки 08.07.2023 г.

Принята к публикации 25.04.2024 г.

Рассмотрена задача нелинейного взаимодействия волновых полей в условиях насыщающейся и пороговой нелинейности. Показана возможность существования сосредоточенных волновых полей в этих условиях. Выявлено существенное отличие взаимодействия таких полей от взаимодействия классических солитонов. Установлено, что определенное соотношение параметров нелинейности может приводить к значительному увеличению интенсивности волны.

Ключевые слова: нелинейные волны, взаимодействие солитонов, пороговая нелинейность, насыщающаяся нелинейность

DOI: 10.31857/S0033849424060076, **EDN:** IJMFLN

ВВЕДЕНИЕ

Сосредоточенные решения нелинейного уравнения Шредингера — солитоны, оказались удивительным образом похожи на соответствующие решения уравнения Кортевега—де Вриза при совершенно различных механизмах нелинейной фокусировки [1,2]. Гидродинамические солитоны после столкновения восстанавливают свою форму и продолжают движение практически по той же траектории, лишь с небольшим сдвигом. Шредингеровские солитоны ведут себя аналогичным образом, но только в том случае, когда для описания нелинейной фокусировки используется модель керровской нелинейности, в которой нелинейное возмущение диэлектрической проницаемости пропорционально квадрату модуля амплитуды волны. Это предположение позволяет описывать основные эффекты, возникающие при нелинейном взаимодействии излучения со средой распространения [3,4]. Однако этот подход имеет определенные ограничения. Очевидно, что нелинейные эффекты не возникают, пока мощность волнового поля недостаточна. Но как только величина амплитуды волны преодолевает некоторое пороговое значение, происходит «пробой» среды и возникает

нелинейная зависимость диэлектрической проницаемости от амплитуды волнового поля. При дальнейшем росте интенсивности нелинейная зависимость становится более сложной. Верхний предел роста или, другими словами, насыщение диэлектрической проницаемости наблюдается для большинства естественных материалов. В этих случаях более подходящим было бы использование модели среды с насыщающейся нелинейностью. Этот подход позволяет в некоторой степени промоделировать процесс расплывания волнового пакета, происходящий при учете диффузии электронной плотности из области возмущения [5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается типичная задача распространения радиоволн в ближайшем околоземном пространстве. С учетом того, что в области фокусировки лучей интенсивность сигнала заметно увеличивается, это может привести к возникновению нелинейного взаимодействия радиоволны с ионосферой [6].

Для описания волнового поля в некоторой выделенной малой области обычно используется уравнение Гельмгольца для амплитуды волнового поля

$$\Delta u + k_0^2 \epsilon u = 0, \quad (1)$$

¹Работа была доложена на XXVIII Всероссийской открытой научной конференции «Распространение радиоволн» (23–26 мая 2023 г., Йошкар-Ола).

где k_0 — волновое число, u — волновое поле, ε — диэлектрическая проницаемость.

Поскольку при высокой интенсивности излученного сигнала диэлектрическая проницаемость становится зависимой от амплитуды волны, для описания распространения радиоволн будет необходимо решить нелинейную задачу.

2. ОСНОВНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим распространение узкого коротковолнового пучка. Для построения решения уравнения Гельмгольца, сосредоточенного в малой окрестности лучевой траектории, введем ортогональную систему координат: x — длина дуги траектории; y — расстояние вдоль направления, ортогонального лучу.

Если волновое поле u представить в виде комплексной функции $u = v \exp(ik\psi)$, где v и ψ — действительные функции, то уравнение Гельмгольца распадется на два уравнения для действительных величин:

$$\Delta v + k^2 [\varepsilon - (\nabla\psi)^2] v = 0, \quad \operatorname{div}(v^2 \nabla\psi) = 0.$$

Учитывая, что производные функции v вдоль траектории существенно меньше, чем в перпендикулярном направлении, после соответствующих выкладок [7] в главном приближении можно получить выражения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 \left[\varepsilon - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] v = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Электрическое поле разогревает среду и создает дополнительное возмущение диэлектрической проницаемости, следовательно, можно считать, что выражение для ε состоит из двух частей: $\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_d$, где ε_r — регулярная часть, независимая от волнового поля, ε_d — возмущение, обусловленное электрическим полем. Можем предположить, что в малой окрестности ε_r — почти константа. Учитывая изменение длины волны в неоднородной среде и, соответственно, волнового числа, далее удобнее представить $\varepsilon = \varepsilon_r (1 + \varepsilon_n(v^2))$ и $k = k_0 \sqrt{\varepsilon_r}$ и перейти к безразмерным переменным $\xi = kx$, $\eta = ky$. В этих переменных получим в главном приближении типичную задачу нелинейного распространения радиоволн:

$$\frac{d^2 v}{d\eta^2} = q^2 v - (1 + \varepsilon_n(v^2))v,$$

где $q = d\psi/d\xi$ — безразмерное волновое число. Это уравнение имеет первый интеграл

$$\left(\frac{dv}{d\eta} \right)^2 - \lambda^2 v^2 + F(v^2) = E, \quad E - \text{const}, \quad (2)$$

где $\lambda^2 = q^2 - 1$, $F(v^2) = \int_0^{v^2} \varepsilon_n(t) dt$.

При $E = 0$ уравнение (2) предполагает существование сосредоточенных волн при условии, что уравнение $F(t) - \lambda^2 t = 0$ имеет два простых корня: $t = 0$ и $t = t_0 > 0$. Тогда амплитуда максимума волнового пучка есть $v_0 = \sqrt{t_0}$. Аналитическое решение будет иметь вид

$$\eta = \pm \int_{v_0}^v \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 t^2 - F(t^2)}}. \quad (3)$$

В случае керровской нелинейности получим $\varepsilon_n(v^2) = \alpha v^2$, где α — коэффициент нелинейности. Следовательно, $F(v^2) = \alpha v^4 / 2$ и интеграл (3) берется в элементарных функциях, что приводит к хорошо известному сосредоточенному решению нелинейного уравнения Шредингера:

$$v = v_0 / \operatorname{ch}(\lambda \eta),$$

где v_0 — амплитуда волнового пучка, $\lambda = \sqrt{\alpha v_0^2 / 2}$ — обратная ширина пучка.

Далее рассмотрим модель распространения радиоволн в условиях пороговой нелинейности. Будем считать, что нелинейные эффекты возникают только для волн, интенсивность которых превышает некоторое пороговое значение [8]. Тогда нелинейное возмущение диэлектрической проницаемости может быть представлено формулой

$$\varepsilon_n(v^2) = \alpha v^2 \theta(v^2 - A^2), \quad (4)$$

где A — пороговое значение, $\theta(x)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что и в этом случае уравнение $F(t) - \lambda^2 t = 0$ имеет два простых корня, $t = 0$ и $t = t_0 > 0$ и, как было показано в [7], это гарантирует существование сосредоточенного решения — солитона. Локализованные волновые поля в среде с пороговой нелинейностью очень похожи на обычные керровские солитоны, но пучок — более узкий в центре и имеет «длинные хвосты». Но есть одна принципиальная особенность — зависимость эффективной ширины волнового пучка от его амплитуды:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{2} \left(v_0^2 - \frac{A^4}{v_0^2} \right)} \theta(v_0^2 - A^2).$$

При дальнейшем увеличении мощности волн возмущение диэлектрической проницаемости стремится к насыщению. Переходим к модели насыщающейся нелинейности, возмущение диэлектрической проницаемости от интенсивности волнового поля будем описывать дробно-линейной функцией [3]:

$$\epsilon_n = \frac{\alpha v^2}{1 + \beta v^2}.$$

Обратная ширина пучка для случая насыщающейся нелинейности описывается формулой

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\ln(1 + \beta v_0^2)}{\beta v_0^2} \right)}$$

и имеет предел $\lambda = \sqrt{\alpha/\beta}$ при $v_0 \rightarrow \infty$. То есть характерная ширина пучка не может быть меньше $\sqrt{\alpha/\beta}$. Таким образом, для насыщающейся нелинейности в принципе невозможен коллапс.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПУЧКОВ

Для описания взаимодействия сосредоточенных волновых пучков, сходящихся под малым углом, воспользуемся параболическим уравнением теории дифракции [9,10]. В безразмерных координатах это уравнение для амплитуды волнового поля u имеет вид

$$2i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\epsilon - 1)u = 0. \quad (6)$$

В нашем случае $\epsilon - 1 = \epsilon_n(|u|^2)$.

В качестве начальных данных при $\xi = 0$ задаем два сходящихся пучка:

$$u_0(\eta) = v(\eta + \eta_0) \exp(i\phi\eta) + v(\eta - \eta_0) \exp(-i\phi\eta),$$

где $v(\eta)$ — есть результат интегрирования уравнения (3), η_0 — координата центра пучка, ϕ — угол выхода пучка. Решая численно задачу (6), находим волновое поле на каждом сечении $\xi = \text{const}$ и по расположению точки максимума амплитуды $v(\eta)$ при каждом значении ξ получаем траекторию движения пучка.

Взаимодействие волновых пучков в средах с пороговой и насыщающейся нелинейностью может значительно отличаться от взаимодействия стандартных солитонов в среде с керровской нелинейностью. Если “стандартные” солитоны расходятся после взаимодействия без изменения амплитуды, то “нестандартные” солитоны ведут себя значительно сложнее. Часть энергии высвечивается, и траектории после взаимодействия не сохраняются.

На рис. 1 представлены траектории взаимодействующих пучков в среде с пороговой нелинейностью для различных значений величины отношения амплитуды исходных пучков v к величине порога нелинейности A : 2.6, 2.8, 3.2. Эллипсом в центре отмечена область взаимодействия пучков. Когда амплитуда пучка незначительно превышает уровень порога, амплитуда волнового поля в области взаимодействия устанавливается ниже порога, и задача становится линейной, т.е. поле диссипирует. Самое удивительное, что при амплитуде пучка, превышающей уровень порога в диапазоне приблизительно 1.5...2.5, пучки слипаются. И только очень мощные волновые поля, значительно превышающие порог

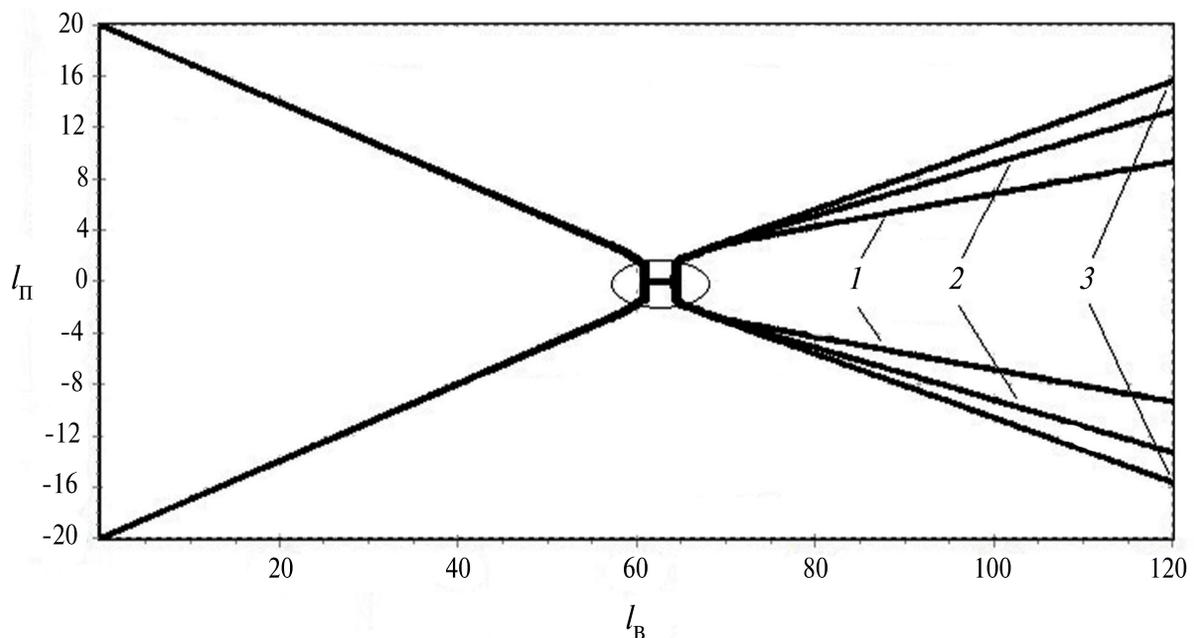


Рис. 1. Траектории пучков, взаимодействующих в среде с пороговой нелинейностью при $v/A = 2.6$ (1), 2.8 (2), 3.2 (3); $l_{\text{П}}$ и $l_{\text{В}}$ — расстояние поперек и вдоль движения пучка соответственно.

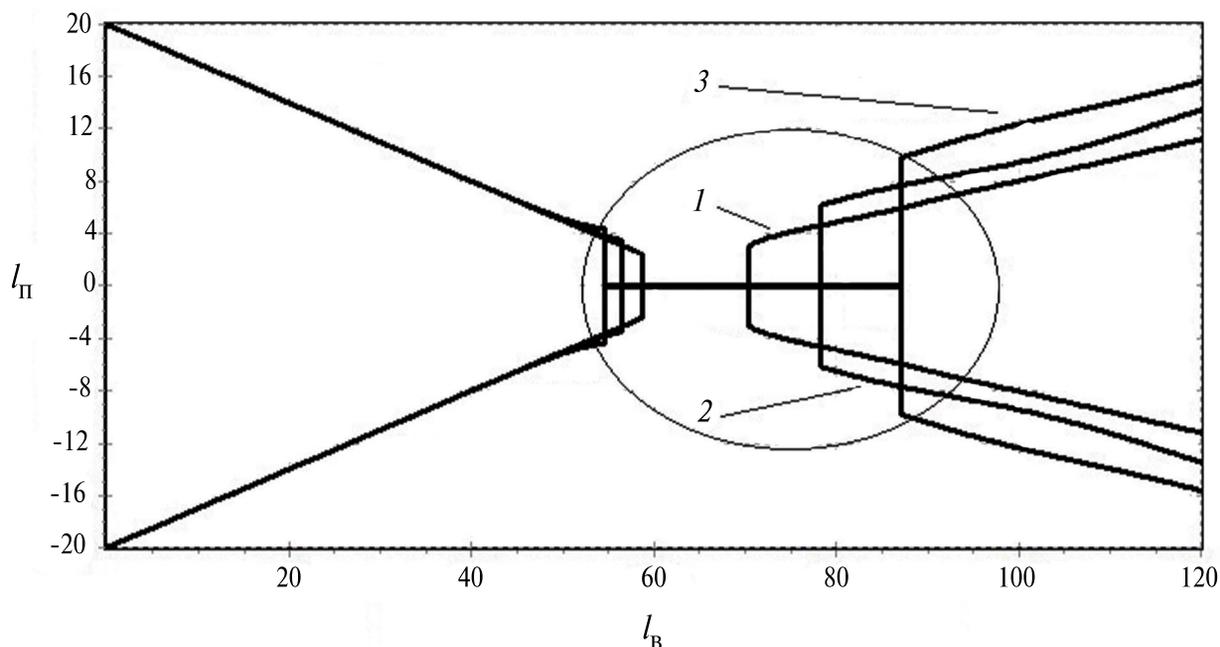


Рис. 2. Траектории пучков, взаимодействующих в среде с насыщающейся нелинейностью при $\beta = 0.8$ (1), 2.0 (2), 3.2 (3); l_{\perp} и l_{\parallel} — расстояние поперек и вдоль движения пучка соответственно.

нелинейности, ведут себя аналогично керровским солитонам, что вполне ожидаемо.

На рис. 2 представлены траектории взаимодействующих пучков в среде с насыщающейся нелинейностью для значений параметра насыщения β , равных 0.8, 2.0, 3.2. Эллипсом в центре отмечена область взаимодействия пучков. Часть энергии также высвечивается, но количество пучков сохраняется. Эти пучки ближе к керровским солитонам, но область взаимодействия таких пучков заметно растет с увеличением параметра насыщения β .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, можно утверждать, что для случая как пороговой, так и насыщающейся нелинейности существуют уединенные волны — сосредоточенные решения соответствующих волновых уравнений. Эти волны подобны керровским солитонам, но их взаимодействие при определенном соотношении параметров может значительно отличаться от стандартного взаимодействия солитонов. В условиях пороговой нелинейности пучки могут сливаться в единый конгломерат с увеличенной амплитудой. При многократном взаимодействии амплитуда будет и далее возрастать, но не до бесконечности, так как при увеличении амплитуды пучки перестают слипаться. Очевидно, что при значительном превышении порога нелинейности пороговые солитоны почти восстанавливают свою структуру после взаимодействия, амплитуда каждого пучка приближается к исходной. В случае насыщающейся нелинейности взаимодействие пучков ближе к взаимодействию стандартных солитонов, хотя область

взаимодействия заметно возрастает при увеличении параметра насыщения.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
2. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
3. Черкашин Ю. Н. // Тр. XXVI Всерос. открытой науч. конф. «Распространение радиоволн». Казань, 1–6 июля 2019. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2019. Т. 2. С. 41.
4. Черкашин Ю. Н., Еременко В. А. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. Т. 14. № 8. С. 13.
5. Еременко В. А., Молотков И. А. // РЭ. 1998. Т. 43. № 6. С. 657.
6. Бочкарев Г. С., Еременко В. А., Лобачевский Л. А. и др. // Геомагнетизм и аэронавигация. 1980. Т. 20. № 5. С. 848.
7. Еременко В. А., Манаенкова Н. И. // Успехи совр. радиоэлектроники. 2017. Т. 71. № 6. С. 49.
8. Еременко В. А., Манаенкова Н. И. // Тр. XXVI Всерос. открытой науч. конф. «Распространение радиоволн». Казань, 1–6 июля 2019. Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та, 2019. Т. 2. С. 505.
9. Черкашин Ю. Н. // РЭ. 1971. Т. 16. № 1. С. 173.
10. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.

DEPENDENCE OF SOLITON INTERACTION ON THE TYPE OF NONLINEARITY

V. A. Eremenko, N. I. Manaenkova*

*Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation RAS (IZMIRAN),
Kaluzhskoye Highway, 4, Moscow, 108840 Russian Federation*

**E-mail: nat_man@mail.ru*

Received July 8, 2023, revised July 8, 2023, accepted April 25, 2024

The problem of nonlinear interaction of wave fields under conditions of saturable and threshold nonlinearity is considered. The possibility of existence of concentrated wave fields under these conditions is shown. A significant difference between the interaction of such fields and the interaction of classical solitons is observed. It is established that a certain ratio of nonlinearity parameters can lead to a significant increase in wave intensity.

Keywords: nonlinear waves, solitons interaction, threshold nonlinearity, saturable nonlinearity