

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874

ДИСПЕРСИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ РЕЗИСТИВНЫХ ДИПОЛЕЙ

© 2024 г. В. И. Пономаренко, И. М. Лагунов*

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,
просп. Акад. Вернадского, 4, Симферополь, 295007 Российская Федерация

*E-mail: lagunov.igor@gmail.com

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.

После доработки 01.07.2023 г.

Принята к публикации 22.07.2023 г.

Установлено соответствие между электродинамическими характеристиками тонкого проводящего цилиндрического диполя и иглообразного эллипсоида. Теоретически обоснован известный экспериментальный результат, по которому диполю соответствует вписанный в него эллипсоид из того же материала. Показано, что в зависимости от величины скин-эффекта дисперсионная зависимость эффективной диэлектрической проницаемости композита на основе диполей может соответствовать как модели диэлектрика Лоренца, так и модели Дебая. Проведено сравнение результатов расчета диэлектрической проницаемости композита по различным формулам смешения с экспериментальными данными.

Ключевые слова: композиционные материалы, дисперсионная зависимость, эффективная диэлектрическая проницаемость

DOI: 10.31857/S0033849424040023, EDN: JSFNPM

ВВЕДЕНИЕ

Поглотители электромагнитных волн (ПЭВ) применяются для оборудования безэховых камер, радиолокационной маскировки объектов, улучшения работы антенн и в других целях [1, 2]. Одним из перспективных материалов для ПЭВ являются композиты с наполнителями в виде отрезков углеродного волокна [3, 4]. Дисперсию их эффективной диэлектрической проницаемости (ЭДП) можно варьировать в широких пределах путем изменения концентрации включений, их проводимости и размеров с целью оптимизации характеристик ПЭВ на их основе.

Проектирование таких материалов основывается на расчетных оценках частотной зависимости ЭДП. Практически точный расчет ЭДП может быть проведен на основе решения задачи дифракции для модельных композитов с упорядоченной структурой [5, 6]. Однако в реальных композитах включения расположены в матрице хаотически, в связи с чем расчет ЭДП в них проводится с использованием различных формул смешения для включений эллипсоидальной формы [3, 4, 7, 8].

Применение последних к композиту с цилиндрическими диполями основано на сопоставлении диполю вытянутого эллипсоида вращения

из того же материала. Как показано в [9] на основе анализа экспериментальных значений ЭДП композита с тонкими проводящими цилиндрическими диполями, наилучшее соответствие имеет место, если сопоставляемый диполю эллипсоид “вписан” в него, т.е. его большая полуось равна половине длины диполя, а малая полуось равна радиусу диполя. Однако теоретическое обоснование такой замены в литературе отсутствует. Кроме того, при таком подходе, основанном на использовании формул статики для эллипсоидов, не учитывается влияние скин-эффекта.

В [10] получено интегральное уравнение для тока в тонком цилиндрическом диполе. По току можно вычислить поляризуемость диполя с учетом скин-эффекта. Однако это уравнение не позволяет вычислить соответствующий диполю коэффициент деполаризации (КД).

Целью данной работы является теоретическое обоснование электродинамического соответствия между тонкими цилиндрическими проводящими диполями и иглообразными эллипсоидами, получение аналитических формул для вычисления поляризуемости и КД диполя и их применение к расчету дисперсии ЭДП в композитах на основе таких диполей.

1. ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ТОНКОГО ПРОВОДЯЩЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

Для диполя радиуса r длиной $2h$ из материала с проводимостью σ , находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 в продольном переменном электрическом поле с напряженностью E_0 и циклической частотой ω . в [10] получено следующее выражение для проекции электрического поля на ось x диполя в точке с координатой x_0 на его поверхности:

$$E_x(x_0) = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_1} \int_{-h}^h I(x) dF(x), \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{(x - x_0)}{\left[(x_0 - x)^2 + r^2 \right]^{3/2}}, \quad (2)$$

где $I(x)$ — ток. В (2) опущен введенный в [10] множитель, учитывающий временное запаздывание взаимодействия между элементами диполя, поскольку, как показали численные расчеты, вклад этого множителя незначителен. Учитывая, что

$$E_x(x_0) + E_0 = I(x_0) Z,$$

где Z — комплексное погонное сопротивление, получим, подставляя (2) в (1), интегральное уравнение относительно тока. Заменой переменных

$$\theta = \frac{x_0}{h}, \quad S = \frac{x}{h}, \quad I(\theta) = \frac{I(h\theta)Z}{E_0} \quad (3)$$

уравнение приводится к виду

$$\begin{cases} I(\theta) = 1 + \lambda \int_{-1}^1 \frac{k^2 - 2(S - \theta)^2}{\left[(S - \theta)^2 + k^2 \right]^{5/2}} I(S) dS, \\ \lambda = \frac{1}{4\pi i \omega \varepsilon_1 Z h^2}, \quad k = \frac{r}{h} \ll 1. \end{cases} \quad (4)$$

С учетом (3), полученная в [10] формула для поляризуемости диполя примет вид

$$\alpha = \gamma \int_0^1 I(x) dx, \quad \gamma = \frac{2ih}{\omega Z}, \quad (5)$$

где α — поляризуемость диполя.

Приближенное решение уравнения (4) можно получить, сделав предположение о распределении тока по длине диполя. Обычно это распределение полагается синусоидальным [11] —

$$I(S) = G \cos \frac{\pi}{2} S. \quad (6)$$

Однако вычисление интеграла в (4) с такой функцией затруднительно и, кроме того,

распределение тока не является строго синусоидальным [10]. В связи с этим примем

$$I(S) = G(1 - S^2). \quad (7)$$

На краях и в середине интервала $(-1, 1)$ функции (6) и (7) имеют равные значения, а при $S = \pm 1/2$ близки и имеют значения $0.71G$ и $0.75G$. Подставляя (7) в (4) и используя известные неопределенные интегралы от функций вида $(x^2 + a^2)^{-m/2}$, $m = 1, 3, 5$ [12], пренебрегая малыми величинами k^{2m} , $m \geq 2$, получим

$$G = \frac{1}{1 - 4\lambda \ln(2/(ek))}, \quad (8)$$

где $e = 2,71828\dots$ — число Непера. Из (5), (7), (8) находим

$$\alpha = \frac{\gamma}{3/2 - 6\lambda \ln(2/(ek))}. \quad (9)$$

Для диполя из немагнитного материала импеданс Z выражается через функции Бесселя [13]:

$$Z = \frac{\xi}{2\pi r \sigma} \frac{I_0(\xi r)}{I_1(\xi r)}, \quad \xi = \sqrt{i\omega \sigma \mu_0}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (10)$$

где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. При слабом скин-эффекте, $|\xi r| \ll 1$, используя разложение функций Бесселя в ряды [12], получим с точностью до $(\xi r)^4$

$$Z = R - i\omega \rho, \quad R = (\pi r^2 \sigma)^{-1}, \quad \rho = \mu_0 / (8\pi), \quad (11)$$

где R — статическое погонное сопротивление. С учетом (10), (11) получим из (9)

$$\begin{cases} \alpha(\omega) = \frac{A}{\omega_0^2 - ig\omega - \omega^2}, \quad A = \frac{4h}{3\rho}, \quad g = \frac{R}{\rho}, \\ \omega_0^2 = \frac{n}{\pi \varepsilon_1 \rho r^2}, \quad n = \frac{r^2}{h^2} \ln\left(\frac{2}{ek}\right). \end{cases} \quad (12)$$

Зависимость (12) $\alpha(\omega)$ совпадает с частотной зависимостью поляризуемости молекул-осцилляторов в модели диэлектрика Лоренца [8].

Если пренебречь скин-эффектом, который в реальных композитах на основе углеродных волокон мал, то, полагая $\rho \rightarrow 0$, получим, обозначив поляризуемость через $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha} = \frac{B\tilde{\omega}_0}{\tilde{\omega}_0 - i\omega}, \quad B = \frac{2\varepsilon_1 \nu}{3n}, \quad \tilde{\omega}_0 = \frac{\sigma n}{\varepsilon_1}, \quad (13)$$

где $\nu = 2\pi r^2 h$ — объем диполя.

Зависимость (13) поляризуемости диполя от частоты совпадает с частотной зависимостью поляризуемости молекул в релаксационной модели диэлектрика Дебая [8].

2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЯМИ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ ТОНКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДИПОЛЕЙ И ИГЛООБРАЗНЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Формула для статической поляризуемости эллипсоида вращения α_3 с полуосями a , b , и диэлектрической проницаемостью ε_2 , находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 , имеет вид

$$\alpha_3 = v_3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1 + n_3 (\varepsilon_2 / \varepsilon_1 - 1)}, \quad (14)$$

где $v_3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b$ — объем эллипсоида, n_3 — коэффициент деполяризации, который в случае иглообразного эллипсоида имеет

$$n_3 = \frac{a^2}{b^2} \ln \left(\frac{2b}{ea} \right), \quad \frac{a}{b} \ll 1. \quad (15)$$

Полагая $\varepsilon_2 = i \frac{\sigma}{\omega}$ и считая, что $|\varepsilon_2| \gg |\varepsilon_1|$, что имеет место в реальных композитах на основе проводящих волокон, получим

$$\alpha_3 = \frac{\omega_{03} B_3}{\omega_{03} - i\omega}, \quad B_3 = \frac{v_3 \varepsilon_1}{n_3}, \quad \omega_{03} = \frac{\sigma n_3}{\varepsilon_1}. \quad (16)$$

Сравнивая $\tilde{\alpha}$ и α_3 , находим, что поляризуемость тонкого цилиндрического диполя при несущественном скин-эффекте такая же, как у иглообразного эллипсоида, малая полуось которого равна радиусу диполя $a = r$, а большая полуось равна половине длины диполя $b = h$. При этом величина n равна n_3 и имеет смысл коэффициента деполяризации диполя.

3. ДИСПЕРСИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ КОМПОЗИТА

Установленная аналогия между диполями и эллипсоидами позволяет обоснованно применять для вычисления ЭДП композита на основе диполей формулы смешения для композита с эллипсоидальными включениями.

В приближении Максвелла–Гарнетта (МГ), предполагающем, что поляризуемость включения в композите такая же, как если бы оно находилось в матричной среде, формула для ЭДП имеет вид [4]

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{N \bar{\alpha}}{\varepsilon_1 - n \bar{\alpha} N} \right). \quad (17)$$

Здесь N — число включений в единице объема, $\bar{\alpha} \equiv \alpha \eta$ при пренебрежимо малом скин-эффекте и $\alpha = \alpha \eta$ при слабом скин-эффекте, η — коэффициент, учитывающий ориентацию диполей по отношению к среднему электрическому полю

в композите, $\eta = 1/3$ при хаотической ориентации в пространстве и $\eta = 1/2$ при хаотической ориентации в плоскости, параллельной полю [3]. Если КД настолько мал, что величиной $n \bar{\alpha} N$ в (17) можно пренебречь, по сравнению с ε_1 , то получим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + N \bar{\alpha}. \quad (18)$$

При $\bar{\alpha} = \eta \alpha$ получим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i g \omega}, \quad \omega_p^2 = \eta N B. \quad (19)$$

что соответствует дисперсии в осцилляторной модели диэлектрика Лоренца. При $\bar{\alpha} = \eta \alpha$ получим

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\tilde{\omega}_0 D}{\tilde{\omega}_0 - i \omega}, \quad D = \eta N B. \quad (20)$$

что соответствует релаксационной модели диэлектрика Дебая.

На рис. 1 приведены экспериментальные значения (в зависимости от частоты f) компонент ЭДП для композита на основе отрезков углеродных волокон длиной 1.5 мм с радиусом 4 мкм и проводимостью 10000 См/м, распределенных с объемной концентрацией 0.001 в матрице с относительной диэлектрической проницаемостью 1.8 [3]. На этих же рисунках приведены расчетные зависимости компонент ЭДП. Расчет проводился как с применением формулы (19), так и формулы (20), а также с применением формулы (17). Значения ЭДП, вычисленные с применением указанных формул, совпадают с графической точностью, что объясняется малостью второго слагаемого в знаменателе равенства (17), а также слабостью скин-эффекта в углеродных волокнах.

Из сравнения расчетных и экспериментальных значений ЭДП видно, что полученные формулы для поляризуемости диполя адекватно описывают тип дисперсии в композите как релаксационный, однако имеет место значительное различие между расчетными и экспериментальными значениями мнимой части ЭДП в низкочастотной области.

На рис. 2 приведены экспериментальные значения компонент ЭДП для композита на основе отрезков углеродных волокон длиной 10 мм с радиусом 4 мкм и проводимостью 71000 См/м, распределенных с объемной концентрацией 0.0005 в матрице с относительной диэлектрической проницаемостью 1.8 [3]. На этих же рисунках приведены расчетные значения компонент ЭДП в приближении МГ. Из сравнения видно, что имеет место существенное различие между экспериментальными и расчетными значениями, наиболее выраженное на низких частотах для мнимой части ЭДП.

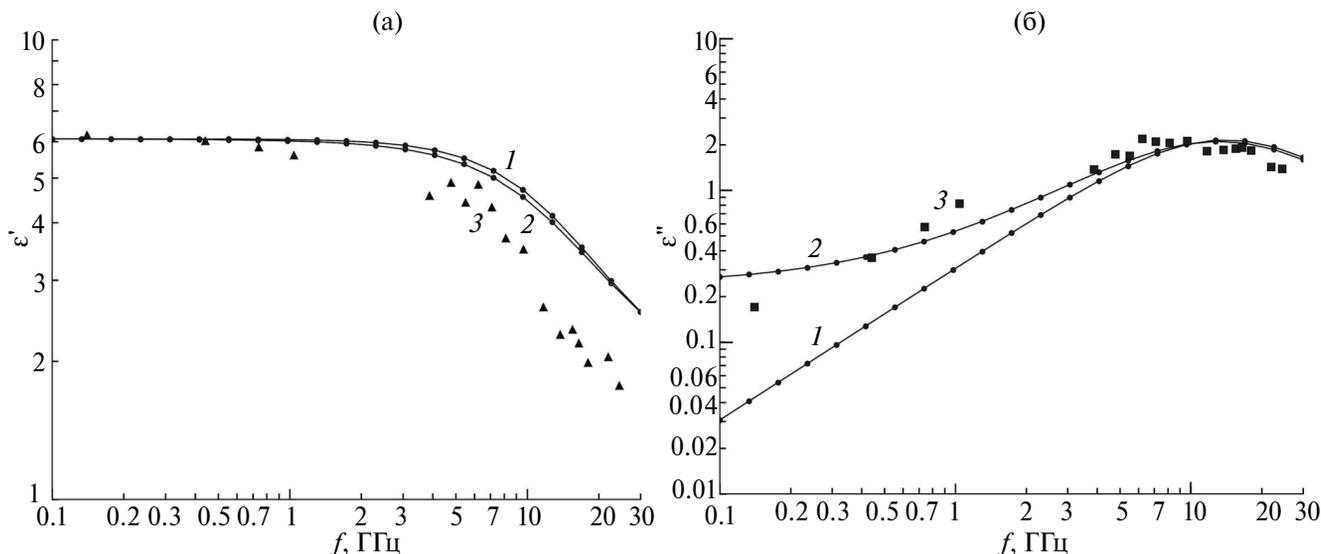


Рис. 1. Частотная зависимость вещественной (а) и мнимой (б) компонент ЭДП композиционного материала на основе отрезков углеродных волокон длиной 1.5 мм: 1 — расчет в приближении МГ; 2 — расчет по обобщенной формуле; 3 — экспериментальные данные.

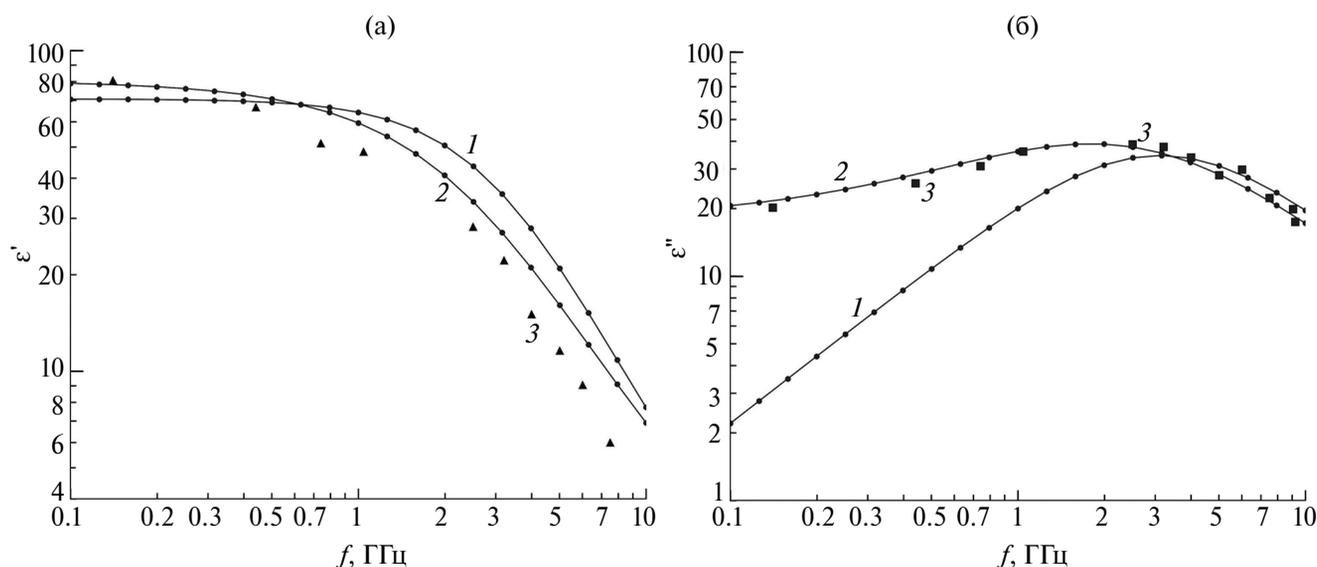


Рис. 2. Частотная зависимость вещественной (а) и мнимой (б) компонент ЭДП композиционного материала на основе отрезков углеродных волокон длиной 10 мм: 1 — расчет в приближении МГ; 2 — расчет по обобщенной формуле; 3 — экспериментальные данные.

Приближение Бруггемана предполагает, что поляризуемость включений в композите такая же, как если бы они находились в среде с диэлектрической проницаемостью, равной эффективной проницаемости композита [8]. Расчеты ЭДП в приближении Бруггемана проводились с учетом соответствия между цилиндрическими диполями и эллипсоидами по формулам, полученным в [7]. Для диполей длиной 1.5 мм частотные зависимости компонент ЭДП практически не отличаются от приведенных на рис. 1 зависимостей, соответствующих приближению МГ. Для диполей длиной 10 мм расчетные значения ЭДП в приближении

Бруггемана расходятся с экспериментальными значениями больше, чем расчетные значения, полученные в приближении МГ.

Обобщенная формула для ЭДП композита на основе эллипсоидов соответствует предположению, что и включения, и частицы матрицы поляризуются так, как если бы они находились в среде с некоторой действующей проницаемостью $\tilde{\epsilon}$ [7],

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} \left(1 + \frac{S_1 + N\alpha}{\tilde{\epsilon} - S_2 - N\bar{\alpha}n} \right),$$

$$S_1 = \frac{3(1-p)(\epsilon_1 - \tilde{\epsilon})\tilde{\epsilon}}{2\tilde{\epsilon} + \epsilon_1}, \quad S_2 = \frac{1}{3}S_1, \quad (21)$$

где p — объемная концентрация включений, α — поляризуемость эллипсоида в среде с диэлектрической проницаемостью $\tilde{\epsilon}$. Результаты расчета ЭДП по обобщенной формуле приведены на рис. 1 и 2. При их проведении в формулы (9), (12), (13), дающие практически одинаковый результат, на место диэлектрической проницаемости матрицы ϵ_1 подставлялась действующая проницаемость $\tilde{\epsilon}$. Эта величина использовалась как подгоночный параметр и оказалась равной $1.8 + 0.15i$ и $2.5 + 0.6i$ для композитов с диполями длиной 1.5 и 10 мм соответственно. Достаточно очевидно, что действующая диэлектрическая проницаемость различна на разных частотах. Однако сравнительное соответствие между экспериментальными и расчетными значениями, полученное при не зависящей от частоты действующей проницаемости, указывает на слабую зависимость последней от частоты, что упрощает ее использование как подгоночного параметра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретически обосновано известное экспериментально установленное электродинамическое соответствие между тонким проводящим цилиндрическим диполем и вписанным в него эллипсоидом из того же материала. Получены формулы для расчета поляризуемости и коэффициента деполаризации диполя. Показано, что в приближении МГ дисперсионная зависимость эффективной диэлектрической проницаемости композита на основе диполей такая же, что и в модели диэлектрика Лоренца. Показано, что при слабом скин-эффекте дисперсия имеет релаксационный характер, соответствующий модели диэлектрика Дебая. Для композитов на основе отрезков углеродных волокон проведено сравнение результатов расчета ЭДП с экспериментальными данными и показано, что при соответствующем выборе значения действующей диэлектрической проницаемости расчеты по обобщенной формуле для ЭДП композита на основе эллипсоидальных включений лучше согласуются с экспериментом, чем расчеты по формулам, соответствующим приближению МГ и приближению Бруггемана, что указывает на целесообразность теоретического обоснования зависимости действующей диэлектрической проницаемости от структуры композита и частоты, которая без такого обоснования применима лишь как подгоночный параметр.

Результаты работы могут быть использованы для моделирования дисперсии диэлектрической

проницаемости в композиционных материалах при их проектировании.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность К. Н. Розанову за любезно предоставленные экспериментальные данные, использованные в данной работе для сравнения с ними численных расчетов ЭДП композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тартаковский А.Б.* // Радиоэлектроника за рубежом. М.: изд-во НИИ Экономики и информации по радиоэлектронике. 1990. Вып. 7(47). С. 40.
2. *Беляев А.А., Беспалова Е.Е., Романов А.М.* // Авиационные материалы и технологии. 2013. № 1. С. 53.
3. *Розанов К.Н.* Частотно-зависимые магнитные и диэлектрические свойства композитных материалов для широкополосных СВЧ применений. Дис... докт. физ.-мат. наук. М.: ИТПЭ РАН, 2018. 326 с.
4. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* Поглотители электромагнитных волн. Радиофизическая теория. Методы расчета. Симферополь: Полипринт, 2021.
5. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* Композиционные материалы: разработка и применение. Новосибирск: Изд. АНС "СибАК", 2017. С. 112.
6. *Лагунов И.М., Пономаренко В.И.* // РЭ. 2020. Т. 65. № 3. С. 245.
7. *Пономаренко В.И., Лагунов И.М.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 4. С. 345.
8. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
9. *Lagarkov A.N., Matytsin S.N., Rozanov K.N., Sarychev A.K.* // J. Appl. Phys. 1998. V. 84. № 7. P. 3806.
10. *Пономаренко В.И., Лагунов И. М.* // РЭ. 2021. Т. 66. № 5. С. 419.
11. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
13. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. М.: Высш. школа, 1978.

DISPERSION OF DIELECTRIC PERMITTIVITY FOR COMPOSITE MATERIAL BASED ON RESISTIVE DIPOLES

V. I. Ponomarenko, I. M. Lagunov*

Vernadsky Crimean Federal University, Vernadsky prospekt 4, Simferopol, 295007 Russian Federation

**E-mail: lagunov.igor@gmail.com*

Received June 4, 2023; revised July 1, 2023; accepted July 22, 2023

A correspondence has been established between the electrodynamic characteristics of a thin conductive cylindrical dipole and a needle-shaped ellipsoid. A well-known experimental result is theoretically justified, according to which an ellipsoid of the same material inscribed in it corresponds to a dipole. It is shown that, depending on the magnitude of the skin effect, the dispersion dependence of the effective dielectric constant of a dipole-based composite can correspond to both the Lorentz dielectric model and the Debye model. The results of calculating the dielectric constant of the composite according to various mixing formulas are compared with experimental data.

Keywords: composite materials, dispersion dependence, effective permittivity