

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ГЕОМЕТРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2024 г. Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП «РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина»,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 12.07.2022 г.

После доработки 12.07.2022 г.

Принята к публикации 27.08.2022 г.

На наборе эталонных точных решений, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и элементарными функциями, исследованы геометризованные модели плоских электронных пучков в I -, φ - и W -представлениях. Проведено сопоставление возможностей геометризованного подхода и параксиальной теории.

Ключевые слова: плоские электронные пучки, геометризованные модели, эталонные точные решения, геометризованный подход, параксиальная теория

DOI: 10.31857/S0033849424030078, **EDN:** JUZAEZ

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия характеризуются повышенным интересом специалистов по сильноточной электронике к разномасштабным задачам: осесимметричным пучкам с высокой компрессией и потокам с сильно вытянутым прямоугольным или эллиптическим сечением, также существенно изменяющим свои размеры. Исследования по преимуществу проводятся с использованием коммерческих программ траекторного анализа, вопросы тестирования которых остаются открытыми, а несоответствие результатам теории в сингулярной прикатодной зоне и необеспеченность формирования торцов ленточных пучков очевидны. Точность математических моделей не является единственным фактором, определяющим успешную разработку новой техники. Однако неадекватность моделирования, выражающаяся в неподтвержденной способности проводить расчеты с ошибкой порядка десятых долей процента, и грубые для такой точности нарушения принятой гидродинамической картины потока вблизи катода, могут быть компенсированы только за счет экспериментальной доводки прибора.

Применение лобовых численных методов не всегда является обязательным, что демонстрируют результаты работ по трехмерным мно-

гопучковым системам [1], эллиптическим [2], осесимметричным и ленточным пучкам [3–5] с высокой компрессией. Приближенные теоретические модели могут не только приводить к решению подобных задач с требуемой точностью, но и быть полезны в качестве нулевого приближения при разработке электронно-оптических систем с принципиально новыми параметрами. Такого рода проблемы, в которых отсутствуют заданные электроды, а известны только желаемые характеристики пучка по геометрии, току и напряжению, являются по сути задачами синтеза, решаемыми численными методами.

Приближенные теоретические модели основываются на классической теории сплошных параксиальных потоков, узких криволинейных трубчатых и ленточных пучков [6], теории Овчарова [7, 8] для двумерных течений, трехмерной параксиальной теории Данилова [9], моделях пучков с эллиптическим сечением [10–13] и геометризованных моделях [14–18]. Построения, относящиеся к ленточным пучкам неограниченной ширины, позволяют рассматривать выделенные из них фрагменты с эллиптическим или прямоугольным сечением.

Геометризованная теория плотных релятивистских потоков основана на введении заранее неизвестной, в общем случае неортогональной,

системы координат x^i ($i = 1, 2, 3$), связанной с траекториями (линии x^1) или трубками тока (поверхности $x^2 = \text{const}$). Уравнения пучка дополняются условиями евклидовости пространства — нелинейными уравнениями в частных производных второго порядка относительно элементов метрического тензора g_{ik} . Полученную систему в двумерном случае удалось представить в виде соотношения на трубке тока и эволюционных уравнений, которые позволяют нарастить “тело” пучка на заданную базовую поверхность с известными продольными распределениями геометрических и физических параметров.

Соотношение на трубке тока имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $h_2 = \sqrt{g_{22}}$, продольной переменной в котором может быть произвольная функция длины дуги образующей $x^1 = f(l)$, $f(0) = 0$, в то время как поперечная координата x^2 входит как параметр. Эволюционная система образована уравнениями в частных производных первого порядка от параметров задачи по x^2 , правые части которых определены продольными зависимостями на базовой трубке тока. Этот вариант геометризованной теории удобно называть l -представлением [14].

В работах [15–17] построено ϕ -представление теории с потенциалом ϕ электрического поля в качестве продольной координаты $x^1 = \phi$ во всем поле течения. Неортогональность системы в l -варианте носила локальный характер и была связана с выполнением условий термоэмиссии в ρ - и T -режимах. В ϕ -варианте система x^i в принципе неортогональна. От l -к ϕ -представлению нельзя перейти по формулам, связывающим уравнения в двух криволинейных системах. Потенциал ϕ , утратив статус искомой функции и становясь независимой переменной, меняет структуру исходных уравнений, в частности, уравнение Пуассона становится уравнением первого порядка.

Третий вариант геометризованной теории, W -представление [18], основан на использовании потенциала обобщенного импульса $\vec{P} = \nabla W$ для отсчета в продольном направлении во всем поле течения, $x^1 = W$. Условием потенциальности потока является отсутствие нормальной компоненты магнитного поля на катоде.

Цель работы — исследование точности трех вариантов геометризованных моделей с использованием эталонных точных решений уравне-

ний плоского пучка, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и элементарными функциями, и сопоставление результатов с классическим параксиальным подходом. Вопросам тестирования приближенных моделей посвящены также работы [19–21].

Задачей геометризованных построений в системе, связанной с трубками тока, является формулировка всех параметров пучка в виде фрагментов рядов Тэйлора по поперечной координате x^2 . В общем случае для этого необходимо проинтегрировать соотношение на базовой поверхности $x^2 = 0$ в первом, втором, третьем и т.д. приближениях относительно функций $h_2, h_{2,2}, h_{2,22} \dots$ ($h_{2,2} \equiv \partial h_2 / \partial x^2$). При тестировании распределения параметров и форма базовой поверхности определяются точным решением. Однако в численном интегрировании упомянутых соотношений нет необходимости. Задача сводится к записи эталонного решения в системе x^1, x^2 , построении первых членов ряда Тэйлора для известных параметров потока и сравнении результата с точными выражениями. Сопоставление геометризованной и параксиальной моделей возможно в задачах, где условия эмиссии допускают использование последней: например, параксиальная теория не подходит для описания осесимметричного и планарного гиротронов при эмиссии в ρ -режиме.

Ограничимся фрагментами рядов Тэйлора с третьими производными, учитывая, что общие геометризованные модели построены до третьего приближения включительно [14].

1. ТЕЧЕНИЕ С ТРАЕКТОРИЯМИ-ОКРУЖНОСТЯМИ

Решение [22] описывает эмиссию в ρ -режиме с полуплоскости $\psi = 0$ и траекториями $R = \text{const}$ (R, ψ — полярные координаты) при отсутствии магнитного поля (рис. 1):

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{U(\psi)}{R^2}, \quad 2U = (2J_0)^{2/3} \sin^{4/3} \frac{3\psi}{2}, \\ \rho &= \frac{1}{R^4} \frac{J_0}{\sqrt{2U}}, \quad J = \frac{J_0}{R^5}, \quad J_0 = \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ϕ, ρ, J — потенциал электрического поля, плотность пространственного заряда и плотность тока эмиссии соответственно. Выражения в (1) и ниже записаны в нормировках, устраняющих все физические постоянные используемой системы единиц из уравнений пучка [6, 14].

Полярные координаты связаны с геометрией течения, поэтому вопрос о точности геометризованной модели сводится к построению ряда Тэйлора по поперечной координате $x^2 \equiv \eta$ для наиболее быстро меняющейся функции – $J = J(R)$. В работе [20] отмечено влияние вида этой переменной на точность приближенного решения. Примем за ось пучка линию $R = 1$. Результаты двух вариантов определения поперечной координаты:

$$\begin{aligned} \eta &= R, \quad \bar{\eta} = R_e - 1, \\ \bar{J} &= R^{-5} \approx 1 - 5\bar{\eta} + 15\bar{\eta}^2 - 35\bar{\eta}^3; \\ \eta &= \ln R, \quad \bar{\eta} = \ln\left(\frac{R}{R_e}\right), \\ \bar{J} &= R^{-5} \approx 1 - 5\bar{\eta} + \frac{25}{2}\bar{\eta}^2 - \frac{125}{6}\bar{\eta}^3, \end{aligned} \tag{2}$$

приведены в табл. 1, 2 ($R = R_e$ – граница пучка, $\bar{J}_{ex}$ – точное значение, $\bar{J}_{ap}$ – три приближения геометризованной модели и параксиальное приближение, характеризующееся постоянной плот-

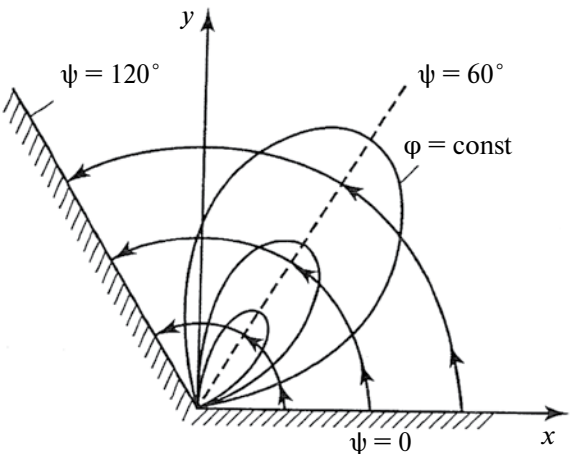


Рис. 1. Течение с траекториями-окружностями с полуплоскости $\psi = 0$, ρ -режим.

ностью тока по сечению пучка, δ_J – относительная ошибка в процентах).

Видно, что во всех случаях уже первое приближение геометризованной теории имеет большую точность, чем параксиальный подход, высшие приближения улучшают результат, а пе-

Таблица 1. Течение с траекториями-окружностями, $\eta = R - 1$

R_e	$\bar{\eta}$	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$				$\delta_J, \%$			
1.1	0.1	0.62092	0.5	0.65	0.615	1	19.47	4.68	0.95	61.05
0.9	-0.1	1.69351	1.5	1.65	1.685	1	11.43	2.57	0.50	40.95
1.15	0.15	0.49718	0.25	0.5875	0.447	1	49.72	18.17	5.59	101
0.85	-0.15	2.25 375	1.75	2.0875	2.206	1	22.35	7.38	2.14	55.63
1.2	0.2	0.40190	0	0.6	0.32	1	100	49.29	20.38	149
0.8	-0.2	3.05180	2	2.6	2.88	1	34.46	14.80	5.63	67.23

Примечания. В таблицах 1–5 для параметров $\bar{J}_{ap}$, δ_J первые три столбца соответствуют трем приближениям геометризованной теории, четвертый – параксиальной модели.

Таблица 2. Течение с траекториями-окружностями, $\eta = \ln(R)$

R_e	$\bar{\eta}$	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$			$\delta_J, \%$		
1.1	0.09531	0.62092	0.5235	0.6370	0.6190	15.70	2.59	0.52
0.9	-0.10536	1.69351	1.5268	1.6656	1.6899	9.84	1.64	0.20
1.15	0.13976	0.49718	0.3012	0.5454	0.4885	39.42	9.69	1.75
0.85	-0.16252	2.25375	1.8126	2.1428	2.2322	19.57	4.93	0.96
1.2	0.18232	0.40190	0.088	0.504	0.378	78.10	25.40	5.90
0.8	-0.22314	3.05180	2.1157	2.7381	2.9696	30.67	10.28	2.69

переход от $\bar{\eta} = R_e - 1$ к $\bar{\eta} = \ln R_e$ существенно снижает уровень ошибки. Использование в качестве $\bar{\eta}$ функций $R_e^\alpha - 1$, $\alpha = 1/2, 1/4$ также приводит к повышению точности, но не столь значительно, как в табл. 2:

$$\begin{aligned} R_e &= 1.2 : \alpha = 1/2, \delta_J = 11.4\%; \\ \alpha &= 1/4, \delta_J = 8.43\%. \end{aligned} \quad (3)$$

Использование ϕ -варианта геометризованной теории для рассматриваемого решения невозможно из-за появления сингулярной линии $\psi = 60^\circ$, совпадающей с линией симметрии.

2. ЭМИССИЯ СО СПИРАЛЬНОГО КАТОДА

В спиральных координатах p, q , связанных с полярными координатами R, ψ соотношениями

$$\begin{aligned} R &= \exp(b_1 p + b_2 q), \quad \psi = b_1 q - b_2 p, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1; \\ b_1, b_2 &= \text{const}; \\ h &= h_1 = h_2 = \exp(b_1 p + b_2 q), \end{aligned} \quad (4)$$

где h_1, h_2 — коэффициенты Ляме, существует точное решение вида

$$\begin{aligned} v_p &= \exp(\alpha b_2 q) U(p), \quad v_q = \exp(\alpha b_2 q) V(p), \\ \Phi &= \exp(2\alpha b_2 q) \Phi(p), \quad \rho = \exp[2(\alpha - 1)q] \sigma(p), \quad (5) \\ J &= J_0 \exp[(3\alpha - 2)q]. \end{aligned}$$

Условия термоэмиссии могут быть выполнены на кривой $p = 0$; v_p, v_q — компоненты скорости. При $\alpha = -1$ имеем $v_q \equiv 0$, так что априори известны спиральные траектории $q = \text{const}$; в случае $\alpha = 0$ потенциал постоянен на линиях $p = \text{const}$.

Эквипотенциали — спирали, l-представление. Ортогональная система, связанная с траекториями потока, определена формулами

$$x^1 = -q - \int \frac{U}{V} dp, \quad x^2 \equiv \eta = q - \int \frac{U}{V} dp. \quad (6)$$

Производные от координат p, q по новым переменным x^1, x^2 и коэффициенты Ляме в этой системе описываются выражениями

$$\begin{aligned} p_{,1} &= -\frac{UV}{2\Phi}, \quad q_{,1} = -\frac{V^2}{2\Phi}; \quad p_{,2} = -\frac{UV}{2\Phi}, \quad q_{,2} = \frac{U^2}{2\Phi}; \\ h_1 &= \frac{hV}{\sqrt{2\Phi}}, \quad h_2 = \frac{hU}{\sqrt{2\Phi}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для высших производных от p, q имеем

$$\begin{aligned} p_{,22} &= -\left(\frac{UV}{2\Phi}\right)' p_{,2}, \quad p_{,222} = -\left(\frac{UV}{2\Phi}\right)'' p_{,2}^2 - \left(\frac{UV}{2\Phi}\right)' p_{,22}; \\ q_{,22} &= \left(\frac{U^2}{2\Phi}\right)' p_{,2}, \quad q_{,222} = \left(\frac{U^2}{2\Phi}\right)'' p_{,2}^2 + \left(\frac{U^2}{2\Phi}\right)' p_{,22}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $\eta = \eta_a$ — уравнение оси:

$$q = \eta_a + \int_0^p \frac{V}{U} dp. \quad (9)$$

Формулы (7)–(9) позволяют построить ряды, соответствующие трем приближениям геометризованной теории

$$\begin{aligned} p_{ap} &= p + p_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} p_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} p_{,222} \bar{\eta}^3, \quad \bar{\eta} = \eta_e - \eta_a, \\ q_{ap} &= q + q_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} q_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} q_{,222} \bar{\eta}^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (10) при фиксированном значении $\eta = \eta_e$ являются параметрическими уравнениями (p — параметр) для приближенной границы пучка. Для оценки ошибки ее достаточно сравнить с точной кривой

$$\eta_e = q - \int \frac{V}{U} dp. \quad (11)$$

Чтобы провести аналогичное сравнение для потенциала, представим функцию $\Phi(p)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{ap} &= \Phi(p_{ap}) = \Phi(p) + \Phi'(p) \bar{p} + \\ &+ \frac{1}{2} \Phi''(p) \bar{p}^2 + \frac{1}{6} \Phi'''(p) \bar{p}^3 = \\ &= \Phi + \Phi' p_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} (\Phi' p_{,22} + \Phi'' p_{,2}^2) \bar{\eta}^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{6} \Phi' p_{,222} + \frac{1}{2} \Phi'' p_{,2} p_{,22} + \frac{1}{6} \Phi''' p_{,2}^3 \right) \bar{\eta}^3, \\ \bar{p} &= p_{ap} - p. \end{aligned} \quad (12)$$

Третья производная Φ''' может быть выражена через производные низших порядков из системы дифференциальных уравнений для решения (5)

$$\Phi''' = -\Phi'' \left(b_1 - \frac{U'}{U} + b_2 \frac{V}{U} \right). \quad (13)$$

Эквипотенциали — спирали, Φ -представление. Введем неортогональную систему x^1, x^2 с потенциалом в качестве продольной координаты

$$x^1 = \Phi(p), \quad x^2 \equiv \eta = q - \int \frac{V}{U} dp. \quad (14)$$

Для первых производных от p, q по x^1, x^2 имеем

$$p_{,1} = \frac{1}{\Phi'}, \quad q_{,1} = \frac{V}{U} \frac{1}{\Phi'}, \quad p_{,2} = 0, \quad q_{,2} = 1. \quad (15)$$

Метрика в системе (14) определена формулами

$$h_1 = h \frac{\sqrt{2\Phi}}{U\Phi'}, \quad h_2 = 1, \quad g_{12} = \frac{V}{U} \frac{1}{\Phi'}, \quad (16)$$

причем все высшие производные от p, q по x^2 — нули.

В результате для траектории получим точное выражение

$$q_e = q + q_{,2}\bar{\eta} = \eta_e + \int \frac{V}{U} dp. \quad (17)$$

Наиболее быстро меняющейся функцией для рассматриваемых в этом разделе решений является плотность тока эмиссии. Учитывая, что на катоде $p = 0$ значения η и q совпадают, имеем ($q_a = 0$)

$$\begin{aligned} \bar{J}_{ex} &= \exp(-2b_2q), \\ \bar{J}_{ap} &= 1 - 2b_2q + 2b_2^2q^2 - \frac{4}{3}b_2^3q^3, \\ \bar{J} &\equiv J/J_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Значения $\bar{J}_{ex}$, $\bar{J}_{ap}$ и относительной ошибки δ_J приведены в табл. 3 для $b_2 = 0.4$. Радиус кривизны катода на базовой поверхности равен 1.09, а расстояние между верхней и нижней кромками пучка $\eta_e = \pm 0.5$ составляет 0.971 и имеет тот же

порядок величины при перепаде плотности тока $J_-/J_+ = 2.27$. Пучок с такими параметрами является существенно непараксиальным и рассчитывается с ошибкой 0.15 %.

Подчеркнем, что при работе в неортогональной системе в силу (15) точно определяется не только траектория, но и все зависящие от p функции.

Траектории — спирали, l -представление. Для решения (5) при $\alpha = -1$ ортогональная система p, q изначально связана с геометрией потока. Чтобы оценить ошибку приближенного вычисления траекторий в геометризованной модели, необходимо рассмотреть функции

$$\begin{aligned} x &= \exp(b_1p + b_2q) \cos(b_1q - b_2p), \\ y &= \exp(b_1p + b_2q) \sin(b_1q - b_2p), \end{aligned} \quad (19)$$

разложив их в ряд по q вблизи оси $q_a = 0$:

$$\begin{aligned} x &= \exp(b_1p) \left\{ \cos b_2p + (b_1 \sin b_2p + b_2 \cos b_2p)q + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2}(b_2^2 - b_1^2) \cos b_2p + b_1b_2 \sin b_2p \right] q^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[b_1 \left(-\frac{1}{6}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 \right) \sin b_2p + b_2 \left(\frac{1}{6}b_2^2 - \frac{1}{2}b_1^2 \right) \cos b_2p \right] q^3 \right\}, \\ y &= \exp(b_1p) \left\{ -\sin b_2p + (b_1 \cos b_2p - b_2 \sin b_2p)q + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2}(b_1^2 - b_2^2) \sin b_2p + b_1b_2 \cos b_2p \right] q^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[b_1 \left(-\frac{1}{6}b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 \right) \cos b_2p + b_2 \left(\frac{1}{2}b_1^2 - \frac{1}{6}b_2^2 \right) \sin b_2p \right] q^3 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

На рис. 2 приведены граница пучка и форма катода в трех приближениях геометризованной модели для расходящегося и сходящегося потоков. Все функции продольной координаты p определены точным решением. Для плотности тока имеем

Таблица 3. Течение со спирального катода с эквипотенциалами $p = \text{const}$, Φ -представление

q	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$			$\delta_J, \%$		
0.1	0.92312	0.92000	0.92320	0.92311	0.34	0.0087	0.0011
0.3	0.78663	0.76000	0.78880	0.78650	3.39	2.76	0.017
0.5	0.67032	0.60000	0.68000	0.66933	10.49	1.44	0.15
-0.1	1.08329	1.08000	1.08320	1.08329	0.30	0.0083	0.00072
-0.3	1.27125	1.24000	1.26880	1.27110	2.46	0.19	0.012
-0.5	1.49182	1.40000	1.48000	1.49067	6.15	0.79	0.077

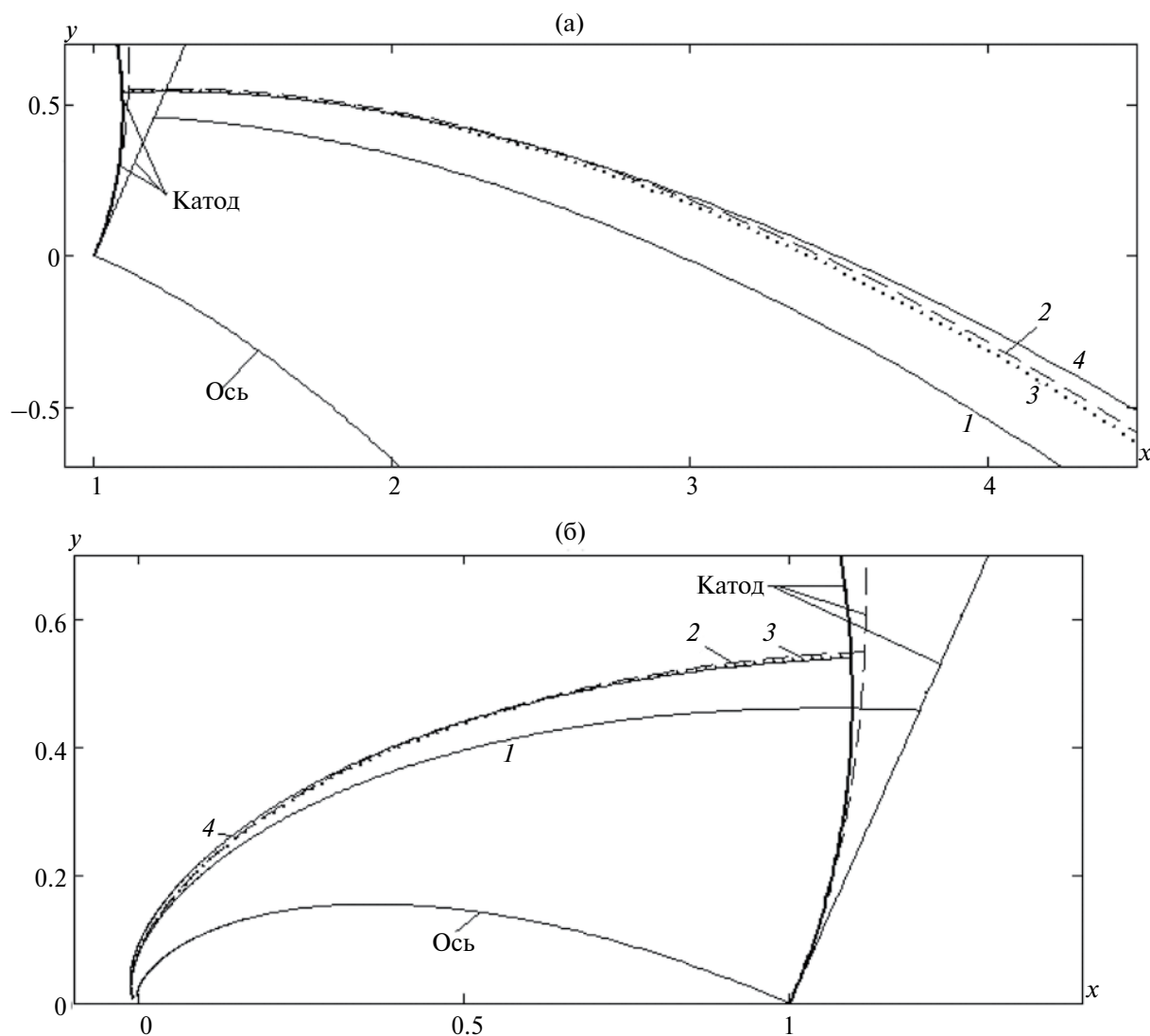


Рис. 2. Граница пучка и форма катода в трёх приближениях (1, 2, 3) l -представления геометризованной теории (4 – точное решение, траектории – спирали), расходящийся поток (а), сходящийся поток (б).

Таблица 4. Течение со спирального катода с траекториями $q = \text{const}$, l -представление

q	$\bar{J}_{ex}$	$\bar{J}_{ap}$			$\delta_j, \%$		
0.1	0.81873	0.80000	0.82000	0.81867	2.29	0.15	0.0073
0.2	0.67032	0.60000	0.68000	0.66933	10.49	1.45	0.15
0.3	0.54881	0.40000	0.58000	0.54400	18.00	5.68	0.88
0.4	0.44933	0.20000	0.52000	0.43467	53.99	19.63	3.26
0.5	0.36788	0.00000	0.50000	0.33333	100	35.91	9.39

$$\begin{aligned} \bar{J}_{ex} &= \exp(-5b_2q), \\ \bar{J}_{ap} &= 1 - 5b_2q + \frac{25}{2}b_2^2q^2 - \frac{125}{6}b_2^3q^3. \end{aligned} \quad (21)$$

В табл. 4 приведены точные и приближенные значения этого параметра и уровень относительной ошибки.

Траектории – спирали, Φ -представление. Неортогональная система x^1, x^2 при $\alpha = -1$ имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= \exp(-2b_2q)\Phi(p), \quad x^2 \equiv \eta = q; \\ h_1 &= h \exp(2b_2q) \frac{1}{\Phi'}, \quad h_2 = h \left(1 + 4b_2^2 \frac{\Phi^2}{\Phi'^2} \right)^{1/2}, \\ g_{12} &= 2b_2 \exp(2b_2q) \frac{\Phi}{\Phi'^2}; \\ p_{,1} &= \exp(2b_2q) \frac{1}{\Phi'}, \quad q_{,1} = 0; \quad p_{,2} = 2b_2 \frac{\Phi}{\Phi'}, \quad q_{,2} = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Высшие производные от q по x^2 равны нулю, а для производных от p получаем

$$\begin{aligned} p_{,22} &= 2b_2 \left(\frac{\Phi}{\Phi'} \right)' p_{,2}, \\ p_{,222} &= 2b_2 \left[\left(\frac{\Phi}{\Phi'} \right)'' p_{,2}^2 + \left(\frac{\Phi}{\Phi'} \right)' p_{,22} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Траектории в системе (22) определяются точно, а для сравнения приближенного и точного значений зависящих от p функций необходимо учесть приближенное выражение для этой координаты, описываемое формулами (12) при замене $\bar{\eta} \rightarrow q$. Использование в (12) формул из (22), (23) приводит к факторизации зависимости от p и ошибке, не зависящей от этой координаты:

$$\Phi(p_{ap}) = \Phi(p) \left(1 + b_2q + 2b_2^2q^2 + \frac{4}{3}b_2^3q^3 \right). \quad (24)$$

Точка p на оси пучка $q_a = 0$ задает значение потенциала $\Phi(p)$, сохраняющееся на эквипотенциали $x^1 = \text{const}$ при переходе на траекторию $x^2 = q$. Точное значение Φ на новой траектории в точке p_{ap} , в которую мы приходим, необходимо сравнить со значением $\Phi = \Phi(p)$:

$$\Phi = \exp(-2b_2q)\Phi(p_{ap}) \sim \Phi_{ex} = \Phi(p). \quad (25)$$

Отличие от единицы комплекса

$$k = \exp(-2b_2q) \left(1 + 2b_2q + 2b_2^2q^2 + \frac{4}{3}b_2^3q^3 \right) \quad (26)$$

определяет ошибку приближенного решения, которая совпадает с оценкой плотности тока эмиссии в табл. 3. Для существенно непараксиального потока $q_e = \pm 0.5$ она составляет десятые доли процента.

Таким образом, при работе в ортогональной системе с решением (5) при $\alpha = -1$ приближенно вычисляется траектория, а в варианте неортогональной системы – функции от p с точностью, определяемой только удалением от оси пучка. Ошибка при расчете плотности тока эмиссии одинакова.

Траектории – спирали, параксиальная модель. Параксиальная модель спирального потока с осью $q_a = 0$ описывается уравнением для толщины пучка $f(l)$ и точным соотношением для потенциала $\Phi = \Phi(p)$

$$\begin{aligned} 2\Phi \frac{d^2f}{dl^2} + \frac{d\Phi}{dl} \frac{df}{dl} + \left(\frac{d^2\Phi}{dl^2} + 4k_1^2\Phi \right) f &= \frac{J_0 f_0}{\sqrt{2\Phi}}, \\ \frac{d^2\Phi}{dp^2} + 4b_2^2\Phi &= \exp(b_1p) \frac{J_0}{\sqrt{2\Phi}}, \quad f_0 \equiv f(0), \end{aligned} \quad (27)$$

где l, k_1 – длина дуги и кривизна оси, соответственно.

Перейдем к аргументу p в уравнении для f и исключим из него вторую производную потенциала

$$\begin{aligned} l &= \int \exp(b_1p) dp = \frac{1}{b_1} [\exp(b_1p) - 1], \\ \frac{d}{dl} &= \exp(-b_1p) \frac{d}{dp}; \\ 2\Phi \frac{d^2f}{dp^2} + \left(\frac{d\Phi}{dp} - 2b_1\Phi \right) \frac{df}{dp} - b_1 \frac{d\Phi}{dp} f &= \\ &= \exp(2b_1p) \frac{J_0}{\sqrt{2\Phi}} [f_0 - \exp(-b_1p) f]. \end{aligned} \quad (28)$$

Получим начальные данные $f_0, (df/dp)_0$ для уравнения (28). Отсчитанное по нормали к оси расстояние f между траекториями $q_a = 0$ и $q = q_e$ точного решения входит в формулы, связывающие координаты (x_e, y_e) и (x, y) :

$$\begin{aligned} x_e &\equiv X = x - f \sin \theta, \\ y_e &\equiv Y = y + f \cos \theta, \\ \text{tg} \theta &= \frac{dy}{dx} = \frac{-b_1 \sin b_2p - b_2 \cos b_2p}{b_1 \cos b_2p - b_2 \sin b_2p}, \\ \text{tg} \theta|_{p=0} &= -\frac{b_2}{b_1}; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\exp(b_1p_e + b_2q_e) \cos(b_1q_e - b_2p_e) = \\ &= \exp(b_1p) \cos b_2p + f(b_1 \sin b_2p + b_2 \cos b_2p), \\ &\exp(b_1p_e + b_2q_e) \sin(b_1q_e - b_2p_e) = \\ &= -\exp(b_1p) \sin b_2p + f(b_1 \cos b_2p - b_2 \sin b_2p). \end{aligned}$$

Величина f_0 соответствует точке $p = q = 0$. Уравнения (29) для этого случая могут быть трансформированы следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\cos b_1 q_e - \frac{b_2}{b_1} \sin b_1 q_e \right) \cos b_2 p_e + \\ & + \left(\sin b_1 q_e + \frac{b_2}{b_1} \cos b_1 q_e \right) \sin b_2 p_e = \\ & = \exp(-b_1 p_e - b_2 q_e), \\ f_0 &= \frac{1}{b_1} \exp(b_1 p_e + b_2 q_e) \sin(b_1 q_e - b_2 p_e), \end{aligned} \quad (30)$$

причем первое из них служит для вычисления p_e .

Параметр p_e является функцией p . Продифференцируем соотношения (29) по p и исключим комплекс $\exp(b_1 p_e + b_2 q_e)(dp_e/dp)$, записав результат при $p = 0$:

$$\left(\frac{df}{dp} \right)_0 = (1 + b_2 f_0) \operatorname{tg}(b_1 q_e - b_2 p_e). \quad (31)$$

Выражения (30), (31) определяют начальные данные для уравнения (21), в котором вместе с уравнением (27) постоянная J_0 может быть исключена при помощи дополнительной нормировки:

$$\Phi = J_0^{2/3} \bar{\Phi}. \quad (32)$$

Точные значения полного тока I_{ex} и трех приближений геометризованной теории I_{ap} определены следующими формулами, причем параксиальному приближению соответствует первый член ряда:

$$\begin{aligned} I_{ex} &= \int_0^{q_e} \exp(b_2 q) \bar{J}(q) dq = \\ &= \frac{1}{4b_2} [1 - \exp(-4b_2 q_e)], \\ I_{ap} &= q_e - 2b_2 q_e^2 + \frac{8}{3} b_2^3 q_e^3. \end{aligned} \quad (33)$$

Значения этих параметров и величина относительной ошибки приведены в табл. 5 для пучков разной ширины.

3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

Геометризованная модель, l-представление. Для решения [24] (рис. 3) возможен только l-вариант

геометризованной теории, так как в Φ -представлении все элементы метрического тензора в плоскости инъекции $x = 0$ обращаются в бесконечность вследствие того, что эквипотенциали в этом сечении касательны к траекториям:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \\ v &= \frac{\sin 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \quad 2\varphi = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}, \\ \rho &= \frac{8}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^2}, \quad \operatorname{ch} 2y + \cos 2x = \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (34)$$

где u, v — компоненты скорости в декартовых координатах.

Ортогональная система, связанная с трубками тока $x^2 = \operatorname{const}$, определена формулами

$$x^1 = \operatorname{th} y \operatorname{tg} x, \quad x^2 \equiv \eta = \operatorname{ch} 2y + \cos 2x. \quad (35)$$

Коэффициенты Ляме, точные значения потенциала, нормального поля, плотности пространственного заряда и кривизны траектории описываются выражениями

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{2 \operatorname{ch}^2 y \cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x}}, \quad h_2 = \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x}}; \\ 2\varphi &= \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x} = \frac{1}{\eta} (\eta - 2 \cos 2x), \quad \rho = \frac{8}{\eta^2}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{1}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^2} \frac{\operatorname{ch} 2y \cos 2x - 1}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x} = \\ &= \frac{1}{\eta^2} \frac{(\eta - \cos 2x) \cos 2x - 1}{\eta - 2 \cos 2x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{2}{(\operatorname{ch} 2y + \cos 2x)^{3/2}} \frac{\operatorname{ch} 2y \cos 2x - 1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}} = \\ &= \frac{2}{\eta^{3/2}} \frac{(\eta - \cos 2x) \cos 2x - 1}{\sqrt{\eta - 2 \cos 2x}}, \\ k &= \frac{2}{(\operatorname{ch} 2y - \cos 2x)^{3/2}} \frac{\operatorname{ch} 2y \cos 2x - 1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\eta}} \frac{(\eta - \cos 2x) \cos 2x - 1}{(\eta - 2 \cos 2x)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для производных от x, y по новым координатам x^1, x^2 получаем

$$\begin{aligned}
x_{,1} &= \frac{2}{D} \operatorname{sh} 2y \operatorname{ch}^2 y \cos x, & y_{,1} &= \frac{2}{D} \sin 2x \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y, \\
x_{,2} &= -\frac{\sin 2x}{D}, & y_{,2} &= \frac{\operatorname{sh} 2y}{D}, & D &= \operatorname{ch}^2 2y - \cos^2 2x; \\
x_{,22} &= -\frac{\cos 2x}{D} x_{,2} + \frac{\sin 2x}{2D^2} D_{,2}, \\
y_{,22} &= \frac{\operatorname{ch} 2y}{D} y_{,2} - \frac{\operatorname{sh} 2y}{2D^2} D_{,2}, \\
D_{,2} &= \operatorname{sh} 4y y_{,2} + \sin 4x x_{,2}; \\
x_{,222} &= \frac{2 \sin 2x}{D} x_{,2}^2 + \frac{2 \cos 2x}{D^2} x_{,2} D_{,2} - \\
&\quad - \frac{\cos 2x}{D} x_{,22} - \frac{\sin 2x}{D^3} D_{,2}^2 + \frac{\sin 2x}{2D^2} D_{,22}, \\
y_{,222} &= \frac{2 \operatorname{sh} 2y}{D} y_{,2}^2 - \frac{2 \operatorname{ch} 2y}{D^2} y_{,2} D_{,2} + \\
&\quad + \frac{\operatorname{ch} 2y}{D} y_{,22} + \frac{\operatorname{sh} 2y}{D^3} D_{,2}^2 - \frac{\operatorname{sh} 2y}{2D^2} D_{,22}, \\
D_{,22} &= 4 \operatorname{ch} 4y y_{,2}^2 + \operatorname{sh} 4y y_{,22} + \\
&\quad + 4 \cos 4x x_{,2}^2 + \sin 4x x_{,22}.
\end{aligned}$$

(37)

Параметрические уравнения границы пучка $\eta = \eta_e$ с параметром x определены выражениями

$$\begin{aligned}
x_{ap} &= x + x_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} x_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} x_{,222} \bar{\eta}^3, & \bar{\eta} &= \eta_e - \eta_a, \\
y_{ap} &= y + y_{,2} \bar{\eta} + \frac{1}{2} y_{,22} \bar{\eta}^2 + \frac{1}{6} y_{,222} \bar{\eta}^3.
\end{aligned}$$

(38)

Для трех приближений потенциала при использовании соотношений (38) имеем

$$\begin{aligned}
\Phi_{ap} &= \Phi \left(1 + \bar{\Phi}_1 \bar{\eta} + \bar{\Phi}_2 \bar{\eta}^2 + \bar{\Phi}_3 \bar{\eta}^3 \right), \\
\bar{\Phi}_1 &= \bar{C}_1 - \bar{H}_1, \\
\bar{\Phi}_2 &= \bar{C}_2 - \bar{H}_1 \bar{C}_1 - \bar{H}_2 + \bar{H}_1^2, \\
\bar{\Phi}_3 &= \bar{C}_3 - \bar{H}_1 \bar{C}_2 + \bar{C}_1 (-\bar{H}_2 + \bar{H}_1^2) - \\
&\quad - \bar{H}_3 + 2 \bar{H}_1 \bar{H}_2 - \bar{H}_1^3; \\
\operatorname{ch} 2y_{ap} &= H_0 + H_1 \bar{\eta} + H_2 \bar{\eta}^2 + H_3 \bar{\eta}^3,
\end{aligned}$$

Таблица 5. Течение со спирального катода с траекториями $q = \text{const}$, сопоставление по току пучка I с параксиальной моделью

q	I_{ex}	I_{ap}			$\delta, \%$		
0.1	0.092411	0.1	0.09200	0.092427	8.20	0.44	0.018
0.2	0.17116	0.2	0.16800	0.17141	16.90	1.84	0.15
0.3	0.23826	0.3	0.22800	0.23952	25.90	4.31	0.53
0.4	0.29544	0.4	0.27200	0.29931	35.39	7.93	1.30
0.5	0.34417	0.5	0.30000	0.35333	45.28	12.83	2.66

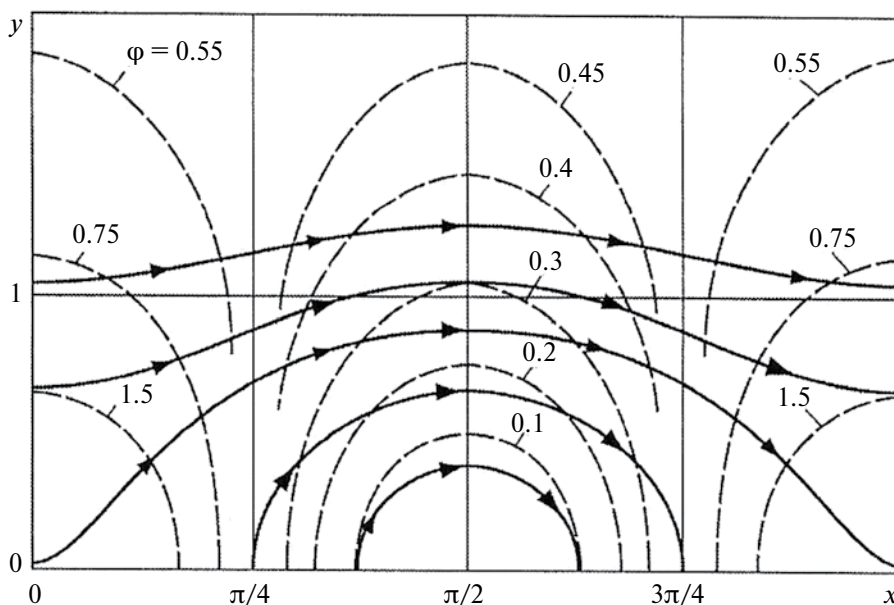


Рис. 3. Плоское периодическое электростатическое течение, штриховые линии – эквипотенциалы, сплошные – траектории.

$$\begin{aligned}
H_0 &= \operatorname{ch} 2y, \quad H_1 = 2\operatorname{sh} 2yy_{,2}, \\
H_2 &= \operatorname{sh} 2yy_{,22} + 2\operatorname{ch} 2yy_{,2}^2, \\
H_3 &= \frac{1}{3}\operatorname{sh} 2yy_{,222} + \\
&+ 2\operatorname{ch} 2yy_{,2}y_{,22} + \frac{4}{3}\operatorname{sh} 2yy_{,2}^3; \\
\cos 2x_{ap} &= C_0 + C_1\bar{\eta} + C_2\bar{\eta}^2 + C_3\bar{\eta}^3, \\
C_0 &= \cos 2x, \quad C_1 = -2\sin 2xx_{,2}, \\
C_2 &= -\sin 2xx_{,22} - 2\cos 2xx_{,2}^2, \\
C_3 &= -\frac{1}{3}\sin 2xx_{,222} - 2\cos 2xx_{,2}x_{,22} + \frac{4}{3}\sin 2xx_{,2}^3; \\
\bar{H}_k &= \frac{H_k + C_k}{H_0 + C_0}, \quad \bar{C}_k = \frac{H_k - C_k}{H_0 - C_0}, \quad 2\varphi = \frac{H_0 - C_0}{H_0 + C_0},
\end{aligned} \quad (39)$$

где φ — потенциал на базовой трубке тока.

Формулы для прочих параметров пучка могут быть получены аналогичным образом.

Параксиальные модели рассматриваемого и последующих эталонных точных решений построены в работе [21].

Результаты расчетов. На рис. 4 приведены функции из (37), по которым можно судить о тенденции рядов к сходимости.

Значения параметров приближенного решения с базовой трубкой тока $\eta_a = 2.1$ ($\eta = 2$ — тра-

ектория-сепаратриса) при начальной ширине пучка $f(0) = 0.05$, полученные на основании геометризованной (столбцы 1–3) и параксиальной (столбец 4) моделей, содержит табл. 6 (точные величины φ , E , k с индексами $ex0$ соответствуют оси пучка при $x = 0$). Для кривизны границы пучка и поля на границе введены аналогичные обозначения. Координаты максимумов абсолютной разности и относительной ошибки обязательно совпадают.

Из табл. 6 видно, что при достаточно большом для этого решения значении $f(0)$ в целом более выгодным оказывается третье приближение, хотя монотонная сходимость по приближениям для φ , E нарушена в плоскости инжекции. Третье приближение позволяет вычислить потенциал и кривизну границы с ошибкой $\delta \sim 4\%$, поле — с ошибкой $\delta \sim 1\%$. Параксиальная модель сильно ему уступает: $\delta_\varphi \sim 6\%$, $\delta_E \sim 38\%$, $\delta_k \sim 34\%$. Сама граничная траектория в параксиальном приближении вычисляется с большей точностью, чем при геометризованном описании: $\Delta Y \sim 3 \cdot 10^{-3}$ и $\Delta Y \sim 9 \cdot 10^{-3}$, соответственно. Траектория и ее кривизна вычисляются независимым образом, что и объясняет различие приведенного уровня ошибок.

Величина $f(0) = 0.05$ составляет примерно пятую часть от характерного линейного размера задачи $L_* \sim 1/k(0)$. На рис. 5 приведены

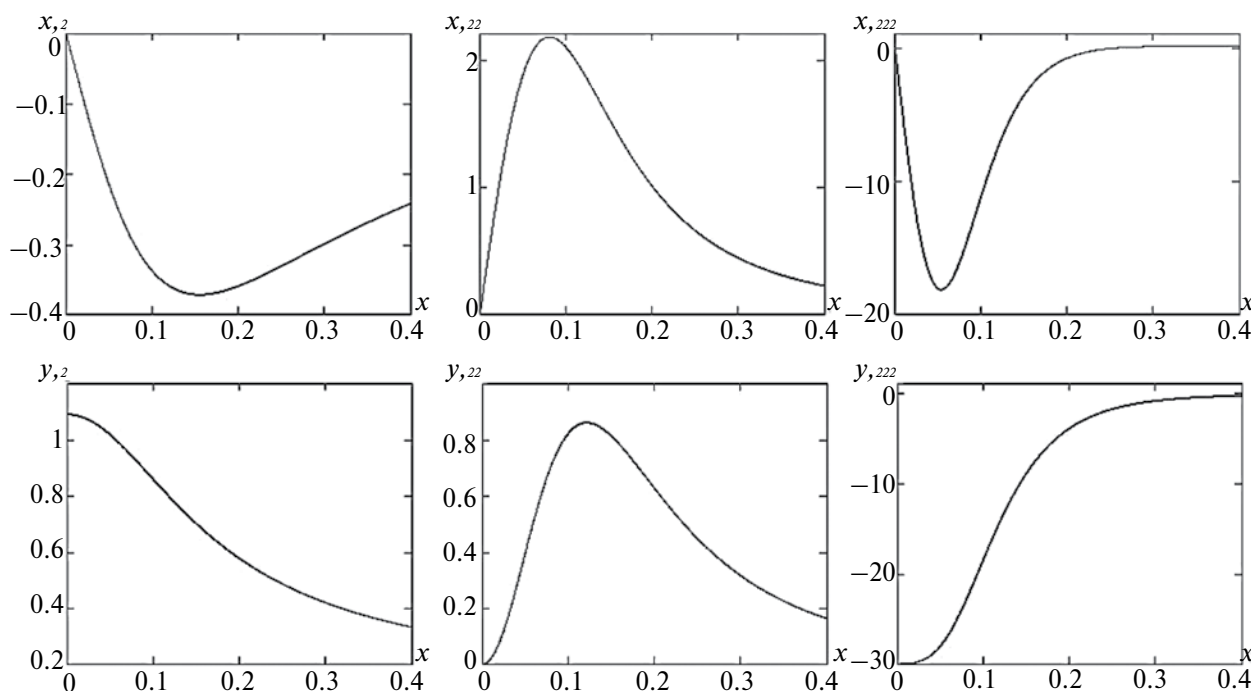


Рис. 4. Производные от x , y по x^1 , x^2 для периодического течения.

Таблица 6. Параметры плоского периодического течения в трех приближениях l -представления теории и на основании параксиальной модели

$\varphi_{ex0} = 0.0352, E_{ex0} = 0.2466, k_{ex0} = 3.504, f(0) = 0.05$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	2.83×10^{-3}	1.56×10^{-3}	1.38×10^{-3}	2.23×10^{-30}
x_Δ	0.186	0	0	0.0352
$\varphi_{ex\Delta}$	0.0671	0.0352	0.0352	0.0330
$\varphi_{ap\Delta}$	0.0668	0.0368	0.0366	6.35
$\delta\varphi_m$	0.79	4.44	3.91	0
x_δ	0	0	0	6.35
$\delta\varphi_\Delta$	0.42	4.44	3.91	6.35
$\delta\varphi_0$	0.79	4.44	3.91	
ΔE_m	5.43×10^{-3}	3.50×10^{-3}	3.34×10^{-3}	0.094
x_Δ	0.082	0.05	0	0
$E_{ex\Delta}$	0.2238	0.2375	0.2466	0.2466
$E_{ap\Delta}$	0.2293	0.2340	0.2433	0.1523
δE_m	6.45	1.48	1.36	38.25
x_δ	0.377	0.055	0	0.1523
δE_Δ	2.43	1.48	1.36	38.25
δE_0	0.57	1.10	1.36	38.25
Δk_m	0.432	0.222	0.135	1.194
x_Δ	0	0.05	0.045	0
$k_{ex\Delta}$	3.504	3.170	3.226	3.504
$k_{ap\Delta}$	3.072	2.948	3.361	2.310
δk_m	12.34	7.09	4.21	34.06
x_δ	0	0.05	0.04	0
δk_Δ	12.34	7.00	4.19	34.06
δk_0	12.34	3.48	1.37	34.06

Примечания. Здесь и далее в таблицах: $\Delta\varphi_m$ и x_Δ — максимальное отклонение от точного значения $|\varphi_{ex0} - \varphi_{ap\Delta}|$ для потенциала и соответствующая координата на оси пучка; $\delta\varphi_m$ и x_δ — относительная ошибка в процентах $|(\varphi_{ex} - \varphi_{ap})/\varphi_{ex}|$ и координата, в которой достигается максимум; $\delta\varphi_\Delta$, $\delta\varphi_0$ — относительные ошибки в точке максимальной абсолютной разности и в плоскости инжекции.

функции φ , $\Delta\varphi$, $\delta\varphi$; E , ΔE ; k , Δk , δk ; за пределами рисунков отклонения от точных значений уменьшаются.

Укажем уровень ошибок для более узких пучков, демонстрирующий быстрый рост при сопоставлении со случаем $f(0) = 0.05$. При $f(0) = 0.02$, 0.03 имеем

$$\begin{aligned} f(0) = 0.02 : \delta\varphi \sim 0.8 \%, \delta E \sim 0.7 \%, \delta k \sim 1.1 \%; \\ f(0) = 0.03 : \delta\varphi \sim 1.7 \%, \delta E \sim 0.9 \%, \delta k \sim 1.4 \%. \end{aligned} \quad (40)$$

Параксиальная модель при $f(0) = 0.03$ улучшает свои показатели по сравнению с табл. 6, однако продолжает сильно отставать от геометризованного подхода:

$$\begin{aligned} f(0) = 0.03 : \delta\varphi \sim 2.7 \%, \\ \delta E \sim 14.6 \%, \delta k \sim 14.4 \%. \end{aligned} \quad (41)$$

4. ПОТОК С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Решение с траекториями-гиперболами (рис. 6) описывается соотношениями [24]

$$\begin{aligned} u &= (\Omega + \omega)y, \quad v = (\Omega - \omega)x, \\ \omega &= \frac{1}{2}H_z, \quad \Omega > \omega, \\ 2\varphi &= (\Omega - \omega)^2 x^2 + (\Omega + \omega)^2 y^2, \\ \rho &= 2(\Omega^2 + \omega^2), \\ (\Omega + \omega)^2 y^2 - (\Omega - \omega)^2 x^2 &= \text{const}, \\ \bar{\Omega} &= \frac{\Omega + \omega}{\Omega - \omega}\omega. \end{aligned} \quad (42)$$

Тестовая задача о потоке с гиперболической осью при $\bar{\Omega} = 1$ позволяет исследовать элек-

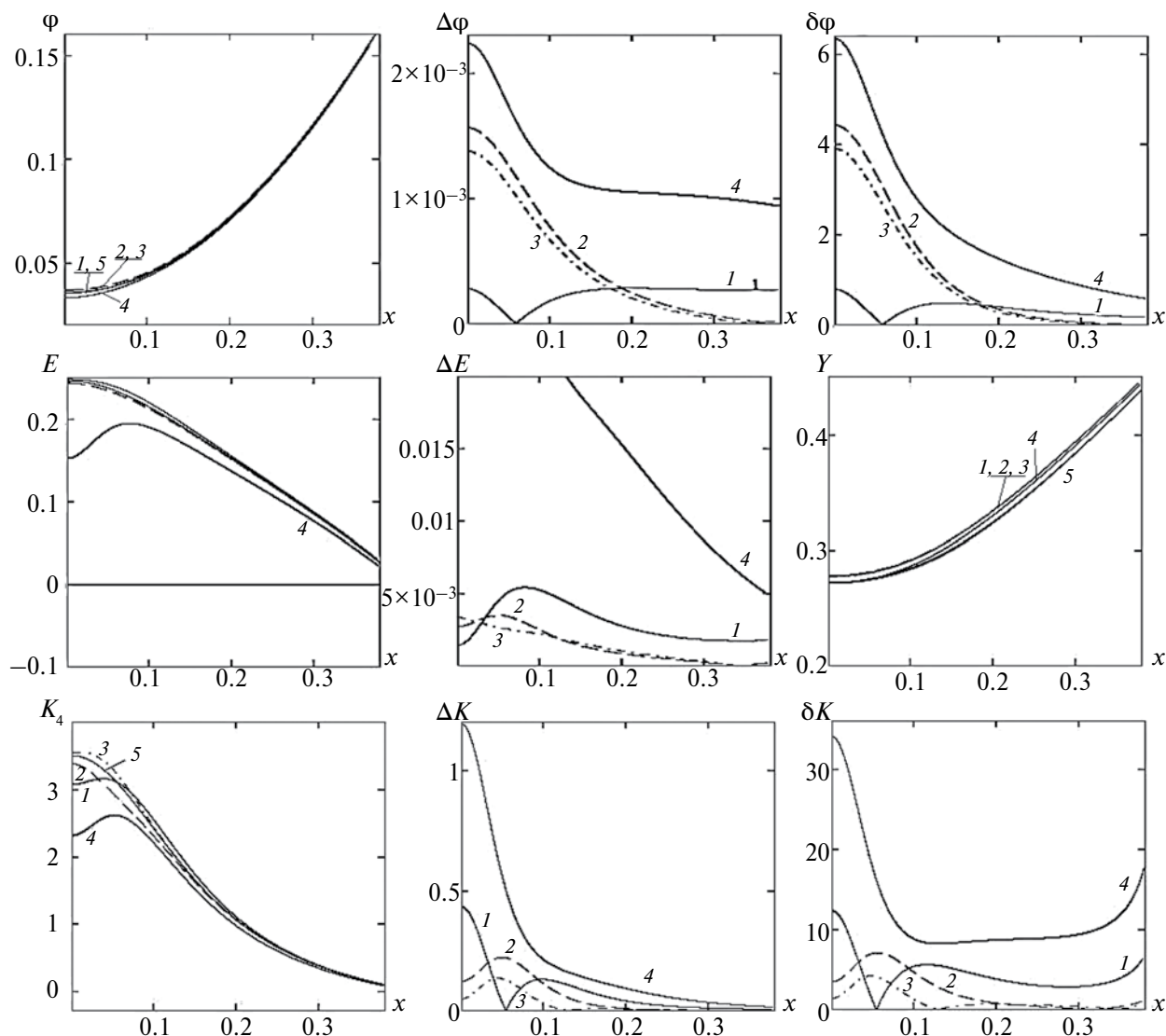


Рис. 5. Функции, характеризующие приближенные модели для периодического течения.

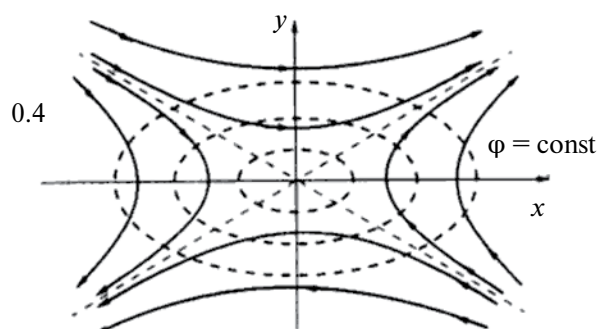


Рис. 6. Течение с траекториями-гиперболами в однородном магнитном поле.

тростатические течения [25] и оценить влияние кривизны $|k| = \bar{\Omega}$ базовой траектории $\eta_a = 1$ в точке старта $x = 1$. Величина $|k|$ возрастает с увеличением параметров H_z и $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \frac{1 + H_z}{1 - H_z}, \quad \Omega = \frac{1}{2}. \quad (43)$$

Значения производной кривизны

$$k'(1) = 3\bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1) \quad (44)$$

при $\bar{\Omega} = 10$ достигает 330.

Как и в предыдущем случае (разд. 3), использование ϕ -варианта теории невозможно из-за одинакового наклона траекторий и эквипотенциалей в плоскости инжекции $y = 0$. Однако эта тестовая задача позволяет судить об эффективности трех моделей: параксиальной и геометризованной в l - и W -представлениях.

Геометризованная модель, l -представление. Ортогональная система x^1, x^2 , связанная с

трубками тока $x^2 = \text{const}$, определена выражениями

$$x^1 = yx^{\bar{\Omega}}, \quad x^2 \equiv \eta = (x)^2 - \bar{\Omega}y^2. \quad (45)$$

Для коэффициентов Ляме и параметров пучка из точного решения имеют место формулы

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{x^{1-\bar{\Omega}}}{\sqrt{D}}, \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{D}}, \quad D = x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2; \\ \bar{\varphi} &= \frac{\Phi}{(\Omega - \omega)^2} = \frac{1}{2}(x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2) = \\ &= \frac{1}{2}[\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2], \quad (46) \\ E &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = -\frac{x^2 - \bar{\Omega}^3 y^2}{\sqrt{D}} = \frac{-\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega}^2 - 1)y^2}{[\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2]^{1/2}}, \\ k &= -\frac{\bar{\Omega}\eta}{D^{3/2}} = -\frac{\bar{\Omega}\eta}{[\eta + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} + 1)y^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Производные от декартовых координат x, y по криволинейным координатам x^1, x^2 описываются выражениями

$$\begin{aligned} x_{,1} &= \frac{\bar{\Omega}yx^{1-\bar{\Omega}}}{D}, \quad y_{,1} = \frac{x^{2-\bar{\Omega}}}{D}; \\ x_{,2} &= \frac{x}{2D}, \quad y_{,2} = -\frac{\bar{\Omega}y}{2D}, \quad D_{,2} = 2(xx_{,2} + \bar{\Omega}^2 y_{,2}); \\ x_{,22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_{,2}}{D} - \frac{x}{D^2}D_{,2}\right), \quad y_{,22} = \frac{\bar{\Omega}}{2}\left(-\frac{y_{,2}}{D} + \frac{y}{D^2}D_{,2}\right); \quad (47) \\ x_{,222} &= \frac{x_{,22}}{2D} - \frac{x_{,2}}{D^2}D_{,2} + \frac{x}{D^3}D_{,2}^2 - \frac{x}{2D^2}D_{,22}, \\ y_{,222} &= \bar{\Omega}\left(-\frac{y_{,22}}{2D} + \frac{y_{,2}}{D^2}D_{,2} - \frac{y}{D^3}D_{,2}^2 + \frac{y}{2D^2}D_{,22}\right), \\ D_{,22} &= 2(xx_{,22} + x_{,2}^2) + 2\bar{\Omega}^2(y_{,22} + y_{,2}^2). \end{aligned}$$

Формулы (38) справедливы и в этом случае при $\eta_a = x^2 - \bar{\Omega}y^2$, а для потенциала имеем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{ap} &= \left[\frac{\Phi}{(\Omega - \omega)^2} \right]_{ap} = \frac{1}{2}\Phi(1 + \bar{\varphi}_1 \bar{\eta} + \bar{\varphi}_2 \bar{\eta}^2 + \bar{\varphi}_3 \bar{\eta}^3), \\ \Phi &= x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2; \quad \varphi_1 = 2(xx_{,2} + \bar{\Omega}^2 y_{,2}), \\ \varphi_2 &= xx_{,22} + x_{,2}^2 + \bar{\Omega}^2(y_{,22} + y_{,2}^2), \quad (48) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{3}xx_{,222} + x_{,2}x_{,22} + \bar{\Omega}^2\left(\frac{1}{3}yy_{,222} + y_{,2}y_{,22}\right); \\ \bar{\varphi}_k &\equiv \frac{\Phi_k}{\Phi}. \end{aligned}$$

Геометризованная теория, W -представление. Неортогональная система координат x^1, x^2 и соответствующая ей метрика описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv W = \Omega xy, \\ x^2 &\equiv \eta = (x)^2 - \bar{\Omega}y^2, \\ \bar{D} &= x^2 + \bar{\Omega}y^2; \\ h_1 &= \frac{\sqrt{x^2 + \bar{\Omega}^2 y^2}}{\bar{\Omega}\bar{D}}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\bar{D}}, \quad (49) \\ g_{12} &= -\frac{1}{2\Omega\bar{D}}; \\ \Omega &\neq \bar{\Omega}, \quad D \neq \bar{D}. \end{aligned}$$

Точные значения параметров пучка для эталонного решения те же, что и в (46). Для производных от x, y по x^1, x^2 получаем

$$\begin{aligned} x_{,1} &= \frac{\bar{\Omega}y}{\Omega\bar{D}}, \quad y_{,1} = \frac{x}{\Omega\bar{D}}; \\ x_{,2} &= \frac{x}{2\bar{D}}, \quad y_{,2} = -\frac{y}{2\bar{D}}, \\ \bar{D}_{,2} &= 2(xx_{,2} + \bar{\Omega}yy_{,2}); \\ x_{,22} &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_{,2}}{\bar{D}} - \frac{x}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2}\right), \\ y_{,22} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{y_{,2}}{\bar{D}} + \frac{y}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2}\right); \quad (50) \\ x_{,222} &= \frac{x_{,22}}{2\bar{D}} - \frac{x_{,2}}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2} + \frac{x}{\bar{D}^3}\bar{D}_{,2}^2 - \frac{x}{2\bar{D}^2}\bar{D}_{,22}, \\ y_{,222} &= -\frac{y_{,22}}{2\bar{D}} + \frac{y_{,2}}{\bar{D}^2}\bar{D}_{,2} - \frac{y}{\bar{D}^3}\bar{D}_{,2}^2 + \frac{x}{2\bar{D}^2}\bar{D}_{,22}, \\ \bar{D}_{,22} &= 2(xx_{,22} + x_{,2}^2) + 2\bar{\Omega}(yy_{,22} + y_{,2}^2). \end{aligned}$$

Приближенные выражения для параметров потока те же, что и в случае ортогональной системы, например, (48) для Φ .

Результаты расчетов. Зависимость коэффициентов (26) от продольной координаты при $\bar{\Omega} = 1, 5, 10$ представлена на рис. 7. Поведение параметров электростатического потока $\bar{\Omega} = 1$ в трех приближениях l -модели и в параксиальном случае демонстрирует рис. 8 при $f(0) = 0.2$.

В табл. 7 приведена числовая информация для этого варианта. Результаты параксиальной теории значительно уступают данным геоме-

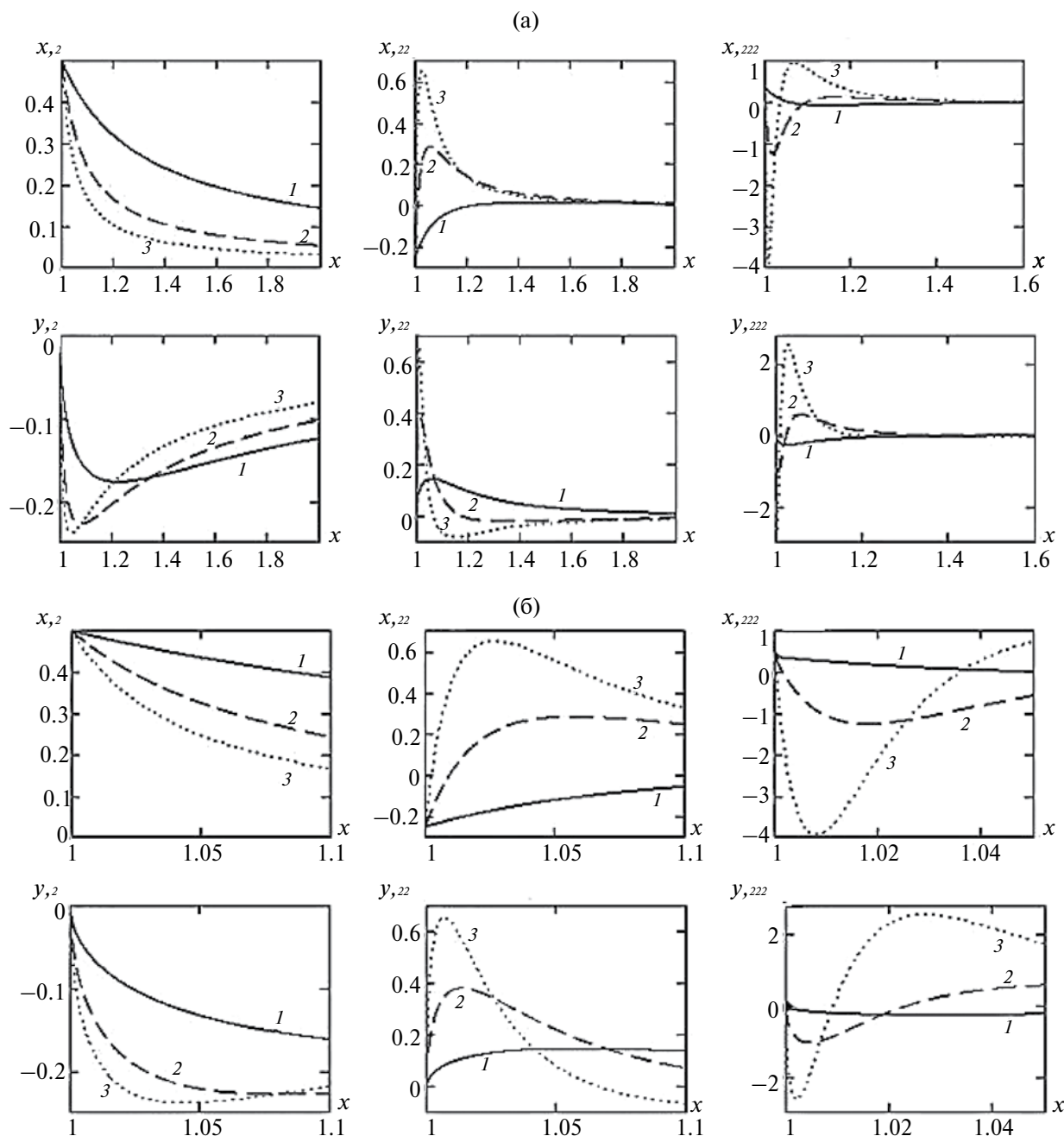


Рис. 7. Производные от x , y по x^1 , x^2 для течения с траекториями-гиперболами (а), в окрестности плоскости инъекции (б) при $\Omega = 1$ (1), 5 (2) и 10 (3).

тризованной модели, сходимость по приближениям которой явно прослеживается, особенно по полю E и кривизне k : $\delta E \sim 0.2\%$, $\delta k \sim 0.9\%$ против δE , $\delta k \sim 70\%$. Максимальная ошибка задачи в третьем приближении меньше 1 %, а ее рост при увеличении толщины пучка в два раза, до $f(0) = 0.4$, отражен в табл. 8.

Перейдем к рассмотрению потоков в магнитном поле при $\bar{\Omega} = |k| = 5$. Уже при $f(0) = 0.1$ параксиальная модель приводит к форме грани-

цы, которая качественно отличается от точной кривой: зависимость $X = X(Y)$ становится немонотонной, причем максимальные пятидесятикратные ошибки по E , k имеют место вблизи точки старта слева от нее (рис. 9).

Сравнение коэффициентов (47), (50) геометризованной теории в l - и W -представлениях приведено на рис. 10. Результаты расчетов для начальной ширины пучка $f(0) = 0.2$ для этих случаев содержат табл. 9, 10. Величина относи-

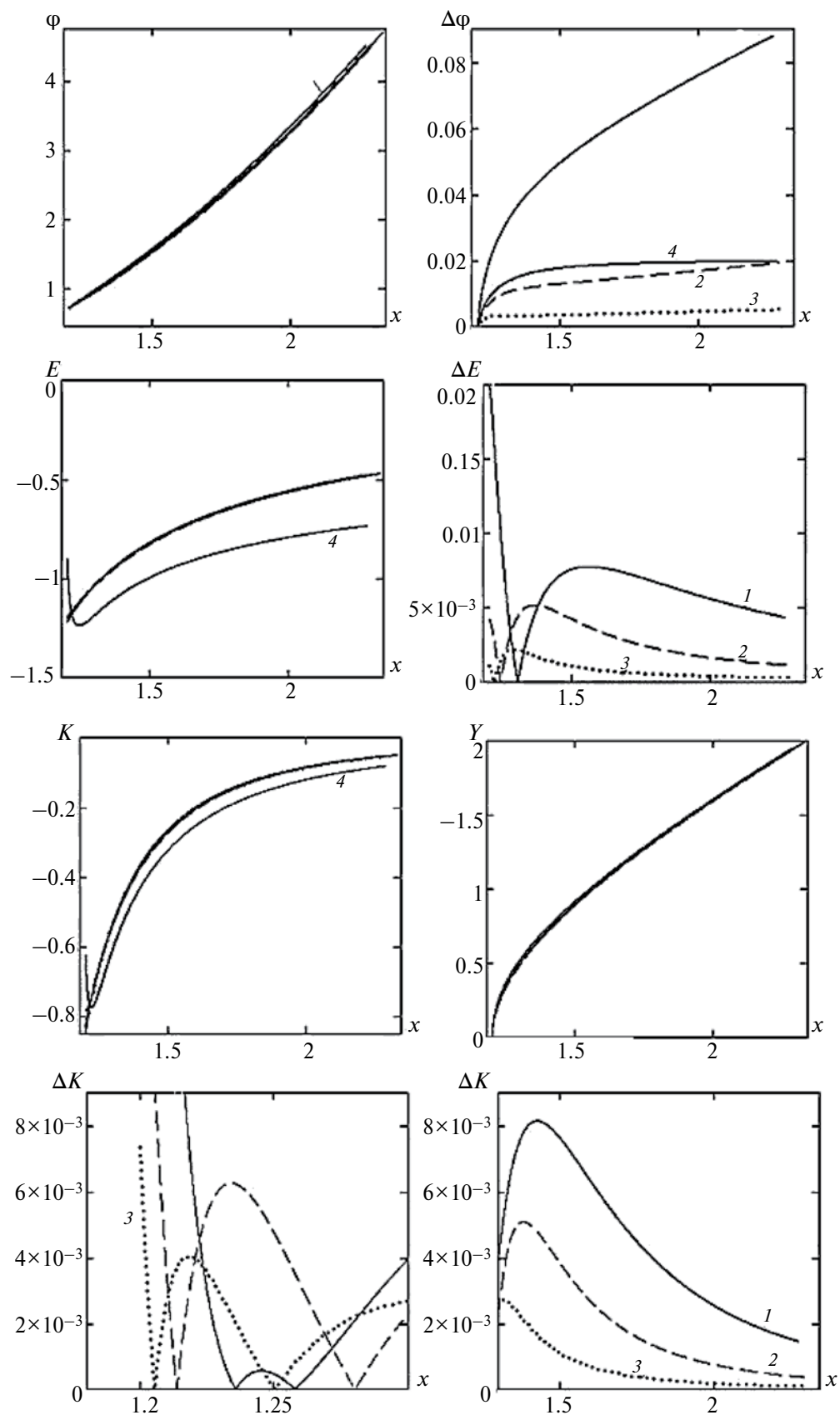


Рис. 8. Функции, характеризующие приближенные модели для электростатического течения с траекториями-гиперболами ($\Omega = 1$); 1, 2, 3 – приближение геометrizованной теории, 4 – параксиальная модель.

Таблица 7. Параметры электростатического потока $\bar{\Omega} = 1$ с траекториями-гиперболами, $f(0) = 0.2$

$\bar{\Omega} = 1, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -0.833, f(0) = 0.2$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	0.107	0.023	6.05×10^{-3}	0.02
x_Δ	2.714	2.729	1.307	2.680
$\varphi_{ex\Delta}$	6.654	6.676	6.645	6.717
$\varphi_{ap\Delta}$	6.761	6.740	6.651	6.736
$\delta\varphi_m$	3.39	1.04	0.35	1.38
x_δ	1.384	1.307	1.256	1.328
$\delta\varphi_\Delta$	1.61	0.34	0.09	0.30
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.02	5.18×10^{-3}	2.18×10^{-3}	-0.3
x_Δ	1.2	1.357	1.282	1.2
$E_{ex\Delta}$	-1.2	-0.955	-1.0523	-1.2
$E_{ap\Delta}$	-1.22	-0.960	-1.0516	-0.9
δE_m	1.67	0.55	0.21	71.48
x_δ	1.2	1.394	1.297	2.73
δE_Δ	1.67	0.54	0.21	25
δE_0	1.67	0.35	0.10	25
Δk_m	0.053	0.019	7.35×10^{-3}	0.208
x_Δ	1.2	1.2	1.2	1.2
$k_{ex\Delta}$	-0.8333	-0.8333	-0.8333	-0.8333
$k_{ap\Delta}$	-0.78	-0.8526	-0.8260	-0.625
δk_m	6.4	2.31	0.88	72.49
x_δ	1.2	1.2	1.2	2.730
δk_Δ	6.4	2.31	0.88	24.6
δk_0	6.4	2.31	0.88	25.0

Таблица 8. Параметры электростатического потока $\bar{\Omega} = 1$ с траекториями-гиперболами, $f(0) = 0.4$

$\bar{\Omega} = 1, \varphi_{ex0} = 0.98, E_{ex0} = -1.4, k_{ex0} = -0.714286, f(0) = 0.4$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	0.43	0.198	0.112	0.08
x_Δ	2.708	2.824	2.767	2.771
$\varphi_{ex\Delta}$	6.353	6.993	6.678	6.698
$\varphi_{ap\Delta}$	6.783	6.795	6.790	6.778
$\delta\varphi_m$	14.39	7.62	6.12	5.09
x_δ	1.496	1.529	1.418	1.475
$\delta\varphi_\Delta$	6.78	2.83	1.67	1.19
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.08	0.048	0.044	1.4
x_Δ	1.4	1.575	1.443	1.399
$E_{ex\Delta}$	-1.4	-1.131	-1.320	-1.403
$E_{ap\Delta}$	-1.48	-1.179	-1.2758	-3.04×10^{-3}
δE_m	5.71	4.30	3.37	101.07
x_δ	1.4	1.599	1.451	2.771
δE_Δ	5.71	4.25	3.36	99.78
δE_0	5.71	2.51	1.44	22.23
Δk_m	0.194	0.151	0.125	0.706
x_Δ	1.4	1.4	1.4	1.399
$k_{ex\Delta}$	-0.7143	-0.7143	-0.7143	-0.7076
$k_{ap\Delta}$	-0.52	-0.8656	-0.5891	-1.55×10^{-3}
δk_m	27.2	21.18	17.52	105.83
x_δ	1.4	1.4	1.4	2.772
δk_Δ	27.2	21.18	17.52	99.78
δk_0	27.2	21.18	17.52	22.22

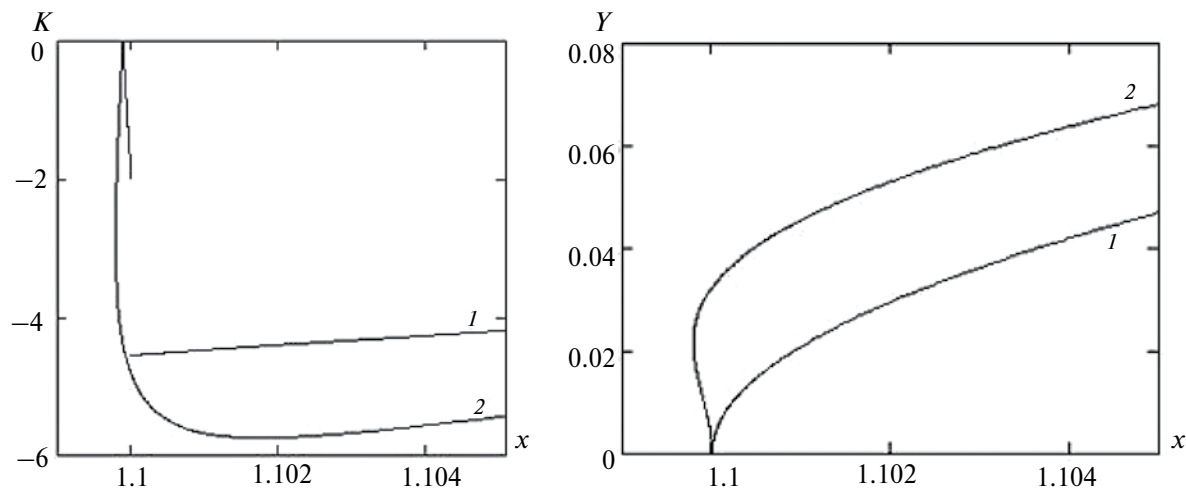


Рис. 9. Траектория границы пучка с осью-гиперболой при $\Omega = 5, f(0) = 0.1$; 1 – точное решение, 2 – параксиальная модель.

Таблица 9. Параметры течения с траекториями-гиперболами, l -представление, $\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.2$

$\bar{\Omega} = 5, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -4.167, f(0) = 0.2$			
Параметр	Номер приближения		
	1	2	3
$\Delta\varphi_m$	0.294	0.062	0.028
x_Δ	2.445	2.462	1.194
$\varphi_{ex\Delta}$	14.332	14.477	0.680
$\varphi_{ap\Delta}$	14.626	14.515	0.708
$\delta\varphi_m$	17.65	6.36	4.06
x_δ	1.181	1.224	1.195
$\delta\varphi_\Delta$	2.05	0.42	4.12
$\delta\varphi_0$	0	0	0
ΔE_m	1.549	0.728	0.430
x_Δ	1.184	1.225	1.199
$E_{ex\Delta}$	-2.128	0.0167	-1.232
$E_{ap\Delta}$	-0.579	-0.712	-0.802
δE_m	—	—	39.98
x_δ	1.225	1.225	1.206
δE_Δ	72.79	43.59	34.9
δE_0	1.70	0.35	0.094
Δk_m	2.537	1.037	0.839
x_Δ	1.176	1.225	1.199
$k_{ex\Delta}$	-6.225	-2.985	-4.204
$k_{ap\Delta}$	-3.687	-4.022	-3.365
δk_m	43.67	34.75	20.11
x_δ	1.19	1.225	1.20
δk_Δ	40.75	34.74	19.96
δk_0	6.41	2.30	0.89

тельной ошибки опускается, если точное значение функции близко к нулю. На рис. 11 изображены параметры потока в W -представлении.

Параксиальный подход непригоден для описания решения с этим набором параметров ($\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.2$) в силу того, что нефизичные

деформации траектории с ростом $f(0)$ не только усугубляются, но и приводят к следующему выражению для угла наклона границы пучка в точке старта:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1 - \bar{\Omega}f(0)}{0}.$$

(51)

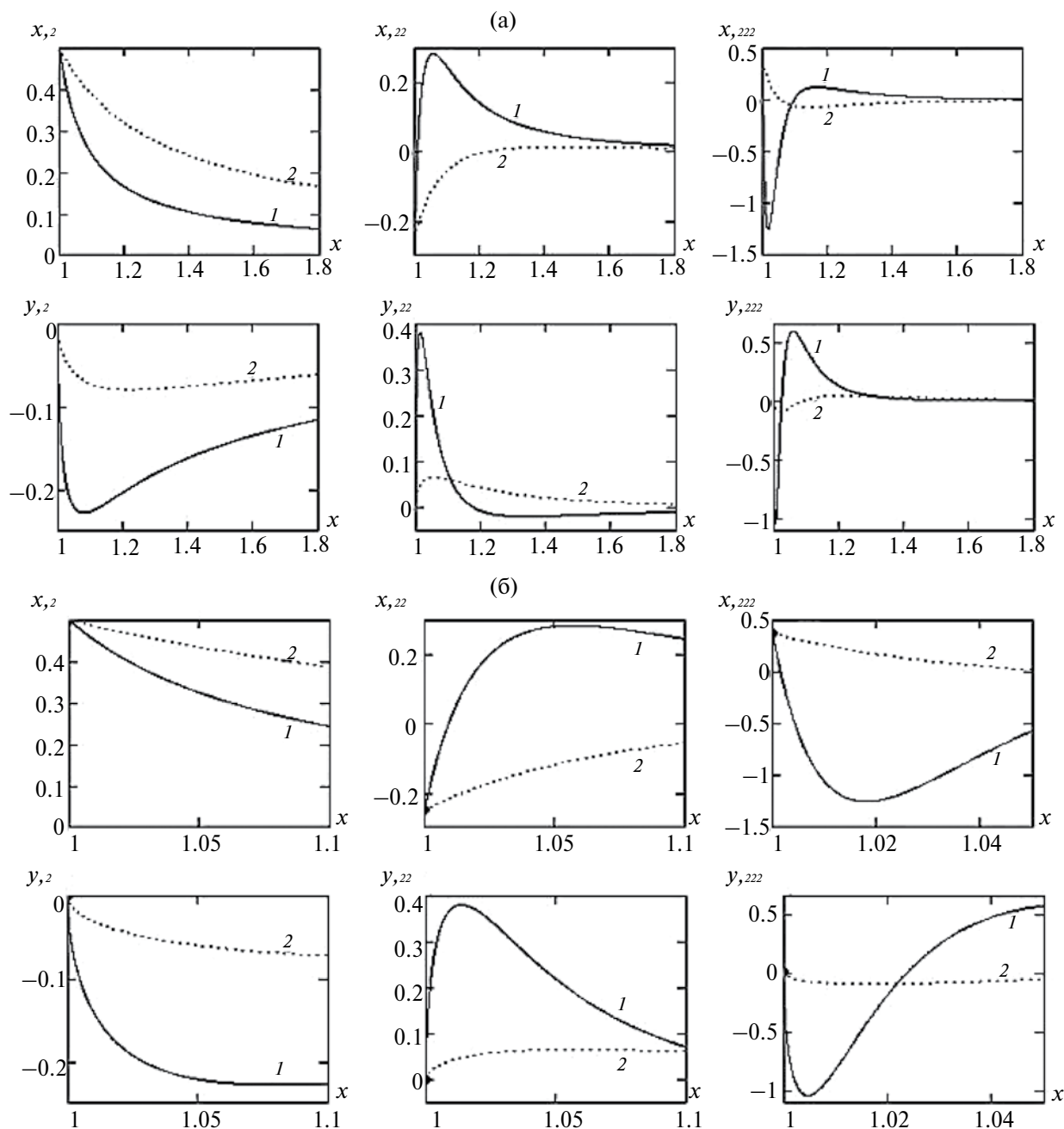


Рис. 10. Производные от x, y по x^1, x^2 для потока с осью — гиперболой $\Omega = 5$ (а), в окрестности плоскости инъекции (б); 1 — l -представление, 2 — W -представление.

При $f(0) = 0.2$ правая часть в (51) приобретает вид неопределенности $0/0$, а при $f(0) > 0.2$ обращается в $-\infty$ вместо $+\infty$.

Из табл. 9, 10 видно, что ошибка вычисления φ, E, k при использовании ортогональных координат составляет 4, 35 и 20 %, а в неортогональном варианте — 1, 7 и 3 %. Обратим внимание на тот факт, что начальная ширина пучка 0.2 равна

радиусу кривизны оси в точке старта, поэтому он не может считаться узким.

При $\bar{\Omega} = 10, L_* = 0.1, f(0) = 0.05$ l -приближение геометризованной теории в третьем приближении характеризуется следующими величинами:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_m &= 0.07\%, \quad E_{ex\Delta} = -0.2158, \quad E_{ap\Delta} = -0.1901, \\ \delta E_{\Delta} &= 12.05\%, \quad \delta k_m = 0.72\%. \end{aligned} \quad (52)$$

Таблица 10. Параметры течения с траекториями-гиперболами, W -представление, $\bar{\Omega} = 5, f(0) = 0.2$

Параметр	Номер приближения		
	1	2	3
$\bar{\Omega} = 5, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -4.167, f(0) = 0.2$			
$\Delta\varphi_m$	0.291	0.063	0.017
x_Δ	2.475	2.483	2.411
$\varphi_{ex\Delta}$	14.781	14.897	13.832
$\varphi_{ap\Delta}$	15.072	14.834	13.849
$\delta\varphi_m$	6.28	2.15	1.23
x_δ	1.289	1.269	1.256
$\delta\varphi_\Delta$	1.97	0.42	0.12
$\delta\varphi_0$	0	0	0
ΔE_m	0.372	0.143	0.082
x_Δ	1.337	1.282	1.255
$E_{ex\Delta}$	3.671	2.109	1.186
$E_{ap\Delta}$	4.044	1.966	1.268
δE_m	—	—	—
x_δ	1.225	1.225	1.225
δE_Δ	10.13	6.78	6.90
δE_0	0.90	0.35	0.095
Δk_m	0.267	0.096	0.065
x_Δ	1.200	1.200	1.237
$k_{ex\Delta}$	-4.167	-4.167	-2.572
$k_{ap\Delta}$	-3.900	-4.263	-2.507
δk_m	11.07	5.12	2.67
x_δ	1.353	1.290	1.250
δk_Δ	6.40	2.31	2.52
δk_0	6.40	2.30	0.89

При $f(0) = 0.2$ в качестве границы потока получается линия с неупорядоченными самопересечениями, в то время как ошибки W -модели соответствуют величинам

$$\delta\varphi \sim 2.6\%, \delta E_\Delta \sim 5\%, \delta k \sim 4.6\%. \quad (53)$$

На рис. 12, 13 представлено поведение коэффициентов разложения (50) для $\bar{\Omega} = 5, 10$ и параметры потока с начальной шириной 0.2 при $\bar{\Omega} = 10$. В табл. 11 приведена соответствующая числовая информация. За пределами рисунков ошибки приближенного решения быстро убывают.

Для W -модели при $\bar{\Omega} = 10, x = 100, y \sim 32, \Delta y \sim 3.5 \cdot 10^{-4}$ относительная ошибка при $f(0) = 0.2$ и компрессии ~ 300 составляет $\sim 1 \times 10^{-3}\%$. Необходимая точность алгоритма при таких компрессиях оценивается величиной ошибки в $3 \times 10^{-3}\%$. Ошибки $\delta\varphi \sim 2.2 \times 10^{-3}\%$, $\delta E \sim 1.1 \times 10^{-3}\%$, $\delta k \sim 3.4 \times 10^{-3}\%$ удовлетворяют этому требованию. Плотность тока относительно ее величины в плоскости инжекции возрастает также в 300 раз, однако необходимо помнить, что рассматриваемое решение характеризуется постоянной плотностью пространственного заряда.

5. ПОТОК С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Эталонное решение с эллиптическими орбитами частиц (рис. 14) в однородном магнитном поле [23], как и решение с гиперболическими траекториями, позволяет рассмотреть течение с большой кривизной оси в плоскости инжекции и с еще большими значениями ее производной, т.е. задачу с высокими градиентами параметров, особенно сложную для приближенных моделей. Геометризованное описание возможно только в I -варианте теории: φ -представление не работает по той же причине, которая была названа в разд. 3, 4, а в W -варианте возникает сингулярная прямая $y = \sqrt{\bar{\Omega}}x$, на которой производные от x, y по x^1, x^2 обращаются в бесконечность.

Эталонное решение описывается формулами

$$\begin{aligned}
 u &= (\omega + \Omega)y, \quad v = -(\omega - \Omega)x, \quad \omega = \frac{1}{2}H_z, \quad \omega > \Omega; \\
 2\varphi &= (\Omega - \omega)^2 x^2 + (\Omega + \omega)^2 y^2, \\
 \rho &= 2(\Omega^2 + \omega^2), (\omega - \Omega)x^2 + (\omega + \Omega)y^2 = \text{const}; \\
 \bar{\Omega} &= \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega}.
 \end{aligned} \quad (54)$$

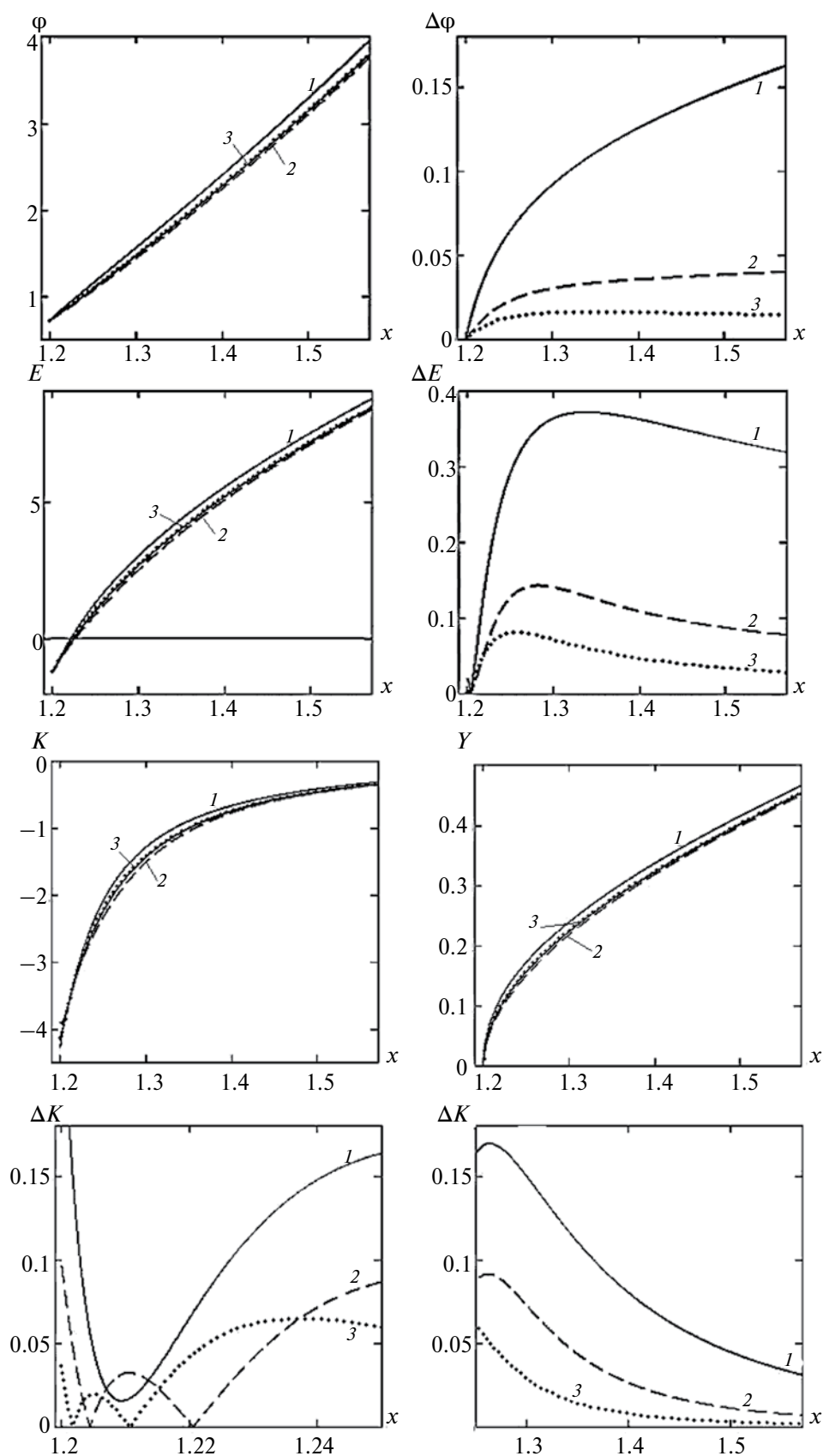


Рис. 11. Функции, характеризующие W -представление геометризованной теории для течения с гиперболическими траекториями при $\Omega = 5, f(0) = 0.2$.

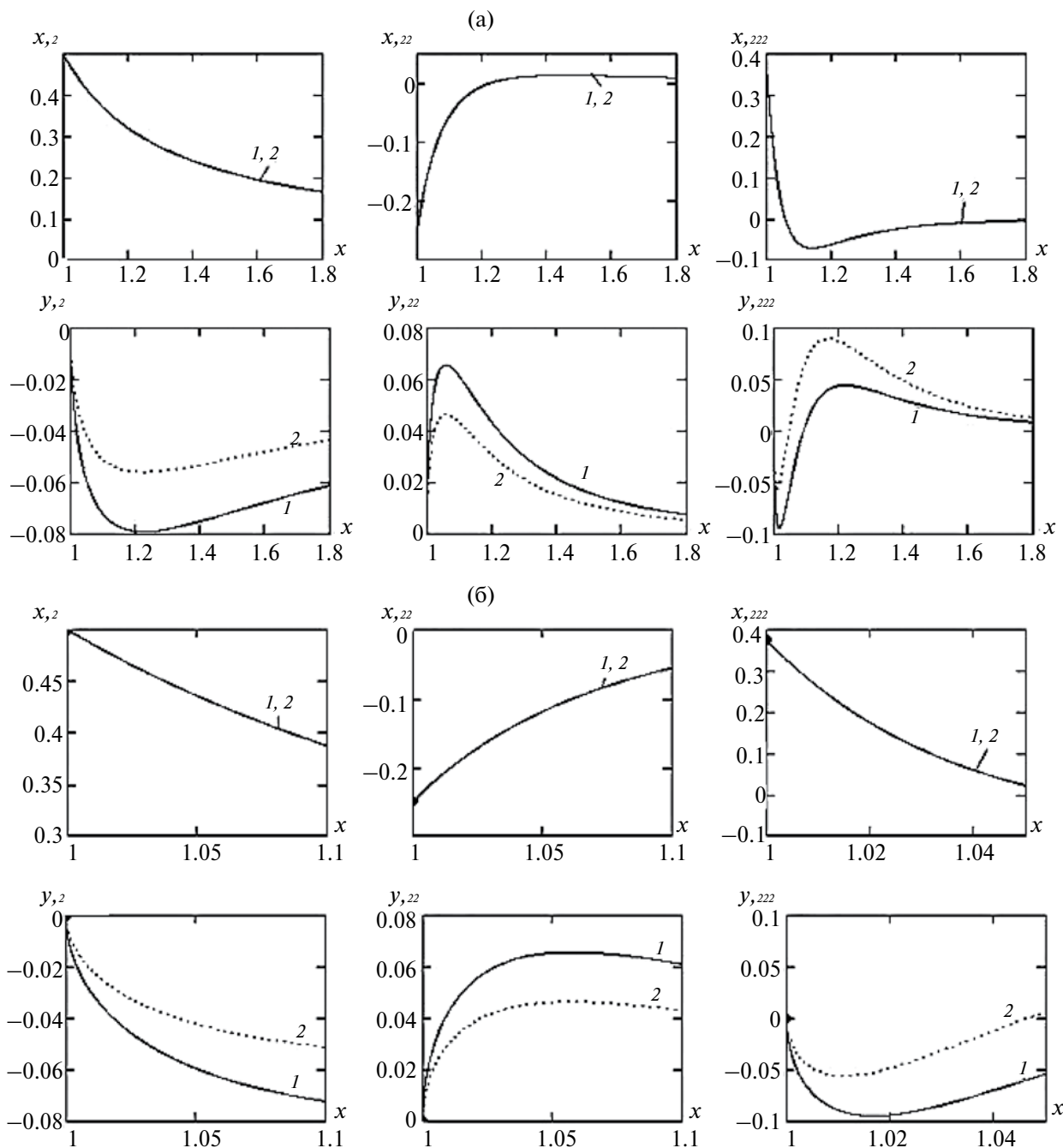


Рис. 12. Производные от x , y по x^1 , x^2 для течения с траекториями-гиперболами, W -вариант теории (а), окрестность плоскости инъекции (б), $\Omega = 5$ (1) и 10 (2).

Геометризованная модель, l -представление. Ортогональная система x^1 , x^2 для решения (55) и соответствующие коэффициенты Ляме имеют вид

$$x^1 = \frac{y^{\bar{\Omega}}}{x}, \quad x^2 \equiv \eta = \bar{\Omega}(x)^2 + y^2; h_1 = \frac{x^2 y^{1-\bar{\Omega}}}{\sqrt{\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{2\sqrt{\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2}}. \quad (55)$$

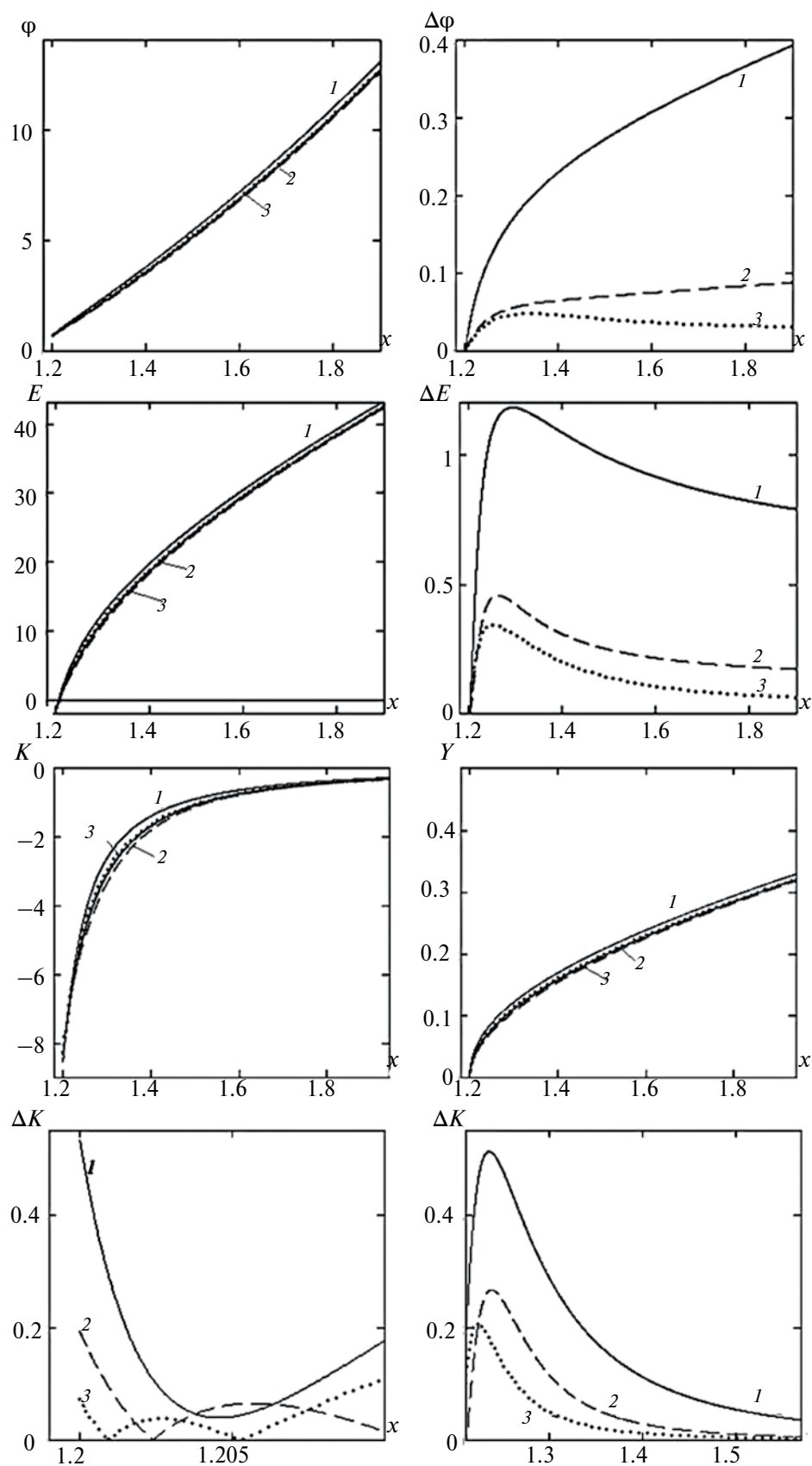
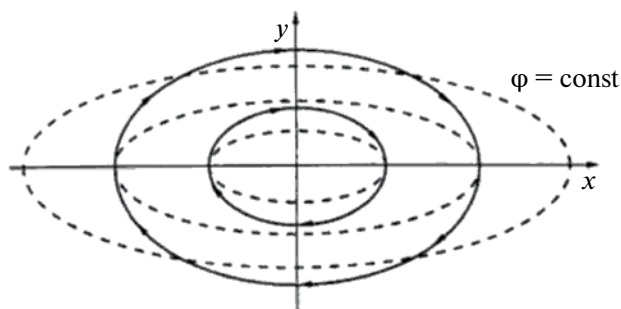


Рис. 13. Функции, характеризующие W -представление геометризованной теории, для течения с гиперболическими траекториями при $\Omega = 10, f(0) = 0.2$.

Таблица 11. Параметры течения с траекториями-гиперболами, W -представление, $\bar{\Omega} = 10, f(0) = 0$

$\bar{\Omega} = 10, f(0) = 0.2, \varphi_{ex0} = 0.72, E_{ex0} = -1.2, k_{ex0} = -8.333$			
Параметр	Номер приближения		
	1	2	3
$\Delta\varphi_m$	0.728	0.155	0.048
x_Δ	3.330	3.345	1.313
$\varphi_{ex\Delta}$	53.796	54.340	2.275
$\varphi_{ap\Delta}$	54.524	54.185	2.323
$\delta\varphi_m$	8.46	2.99	2.60
x_δ	1.261	1.253	1.254
$\delta\varphi_\Delta$	1.35	0.28	2.10
$\delta\varphi_0$	0	0	0
ΔE_m	1.181	0.457	0.341
x_Δ	1.293	1.261	1.252
$E_{ex\Delta}$	10.757	7.647	6.670
$E_{ap\Delta}$	11.938	7.190	7.011
δE_m	—	—	—
x_δ	1.206	1.206	1.206
δE_Δ	10.98	5.97	5.11
δE_0	1.67	0.35	0.094
Δk_m	0.533	0.267	0.207
x_Δ	1.200	1.238	1.223
$k_{ex\Delta}$	-8.333	-3.761	-4.910
$k_{ap\Delta}$	-7.800	-4.028	-4.703
δk_m	17.12	8.11	4.62
x_δ	1.293	1.258	1.234
δk_Δ	6.40	7.09	4.22
δk_0	6.40	2.31	0.88

**Рис. 14.** Течение с эллиптическими орбитами в однородном магнитном поле.

Параметры потока из точного решения описываются формулами

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{(\omega + \Omega)^2} = \frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2) = \\
 &= \frac{1}{2}[\bar{\Omega}\eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2], \\
 E &= \frac{\bar{\Omega}^2 x^3 + y^2}{\sqrt{\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2}} = \frac{\bar{\Omega}^2 \eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2}{\sqrt{\bar{\Omega}\eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2}},
 \end{aligned} \quad (56)$$

$$k = -\frac{\bar{\Omega}(\bar{\Omega}x^2 + y^2)}{(\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{\bar{\Omega}\eta}{[\bar{\Omega}\eta - (\bar{\Omega} - 1)y^2]^{3/2}}.$$

Для производных от x, y по x^1, x^2 получаем

$$\begin{aligned}
 x_{,1} &= -\frac{x^2 y^{2-\bar{\Omega}}}{D}, \quad y_{,1} = \frac{\bar{\Omega} x^3 y^{1-\bar{\Omega}}}{D}, \quad D = \bar{\Omega}^2 x^2 + y^2; \\
 x_{,2} &= \frac{\bar{\Omega} x}{2D}, \quad y_{,2} = \frac{y}{2D}; \\
 x_{,22} &= \frac{\bar{\Omega}}{2} \left(\frac{x_{,2}}{D} - \frac{x}{D^2} D_{,2} \right), \quad y_{,22} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{,2}}{D} - \frac{y}{D^2} D_{,2} \right), \\
 D_{,2} &= 2\bar{\Omega}^2 x x_{,2} + 2y y_{,2}; \\
 x_{,222} &= \frac{\bar{\Omega}}{2} \left(\frac{x_{,22}}{D} - 2 \frac{x_{,2}}{D^2} D_{,2} + 2 \frac{x}{D^3} D_{,2}^2 - \frac{x}{D^2} D_{,22} \right), \\
 y_{,222} &= \frac{1}{2} \left(\frac{y_{,22}}{D} - 2 \frac{y_{,2}}{D^2} D_{,2} + 2 \frac{y}{D^3} D_{,2}^2 - \frac{y}{D^2} D_{,22} \right), \\
 D_{,22} &= \bar{\Omega}^2 (x x_{,22} + x_{,2}^2) + 2(y y_{,22} + y_{,2}^2).
 \end{aligned} \quad (57)$$

Потенциал в трех приближениях геометризованной теории определен выражениями

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{ap} &= \left[\frac{\varphi}{(\omega + \Omega)^2} \right]_{ap} = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\varphi} \left(1 + \bar{\varphi}_1 \bar{\eta} + \bar{\varphi}_2 \bar{\eta}^2 + \bar{\varphi}_3 \bar{\eta}^3 \right), \\ \varphi &= \eta_a + \bar{\Omega}(\bar{\Omega} - 1)x^2; \\ \varphi_1 &= 2(\bar{\Omega}^2 x x_{,2} + y y_{,2}), \\ \varphi_2 &= \bar{\Omega}^2 (x x_{,22} + x_{,2}^2) + y y_{,22} + y_{,2}^2, \\ \varphi_3 &= \bar{\Omega}^2 \left(\frac{1}{3} x x_{,222} + x_{,2} x_{,22} \right) + y y_{,222} + y_{,2} y_{,22}; \\ \bar{\varphi}_k &\equiv \varphi_k / \varphi.\end{aligned}\quad (58)$$

Результаты расчетов. Результаты исследования потоков с эллиптической осью представлены на рис. 15, 16.

Производные от x, y по поперечной координате x^2 для $\bar{\Omega} = 0.16$ (отношение полуосей $a/b = 1/\sqrt{\bar{\Omega}}$) приведены на рис. 15. При увеличе-

нии $\bar{\Omega}$ область резких градиентов все более концентрируется вблизи вершины эллипса с большей кривизной, причем значения производных сильно возрастают. Для $\bar{\Omega} = 0.04$ ($a/b = 5$) порядок функций $x_{,2}, x_{,22}, x_{,222}$ и $y_{,2}, y_{,22}, y_{,222}$ составляет 2, 10, 60 и 1, 6, 70; для $\bar{\Omega} = 0.01$ ($a/b = 10$) – 3, 70, 1600 и 2, 20, 2500. На рис. 16 приведены характеристики параметров потока при $\bar{\Omega} = 0.16$, $f(0) = 0.1$, $f(a) = 0.25$, где $f(a)$, а также величины с индексами exa соответствуют вершине с большей кривизной. Числовую информацию для этого случая и для $\bar{\Omega} = 0.04$, $f(0) = 0.05$, $f(a) = 0.25$; $\bar{\Omega} = 0.01$, $f(0) = 0.01$, $f(a) = 0.1$ содержат табл. 12–14.

Максимальная ошибка приближенного решения имеет место не в вершине с наибольшим значением кривизны контура, а в ее окрестности, размер которой уменьшается с ростом $\bar{\Omega}^{-1}$. Во всех случаях три приближения геометризованной теории обнаруживают тенденцию к сходимости. Рассмотренные варианты характеризуются следующими геометрическими параметрами и уровнем ошибки решения задачи в целом:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= 0.16, \quad k_a = 2.5, \quad L_* = 0.4, \quad f(0) = 0.1, \quad f(a) = 0.25 = 0.625 L_*, \quad \delta k \sim 1.6\%; \\ \bar{\Omega} &= 0.16, \quad k_a = 2.5, \quad L_* = 0.4, \quad f(0) = 0.2, \quad f(a) = 0.5 = 1.25 L_*, \quad \delta k \sim 33\%; \\ \bar{\Omega} &= 0.04, \quad k_a = 5, \quad L_* = 0.2, \quad f(0) = 0.05, \quad f(a) = 0.25 = 1.25 L_*, \quad \delta k \sim 38\%; \\ \bar{\Omega} &= 0.01, \quad k_a = 10, \quad L_* = 0.1, \quad f(0) = 0.01, \quad f(a) = 0.1 = L_*, \quad \delta k \sim 15\%.\end{aligned}\quad (59)$$

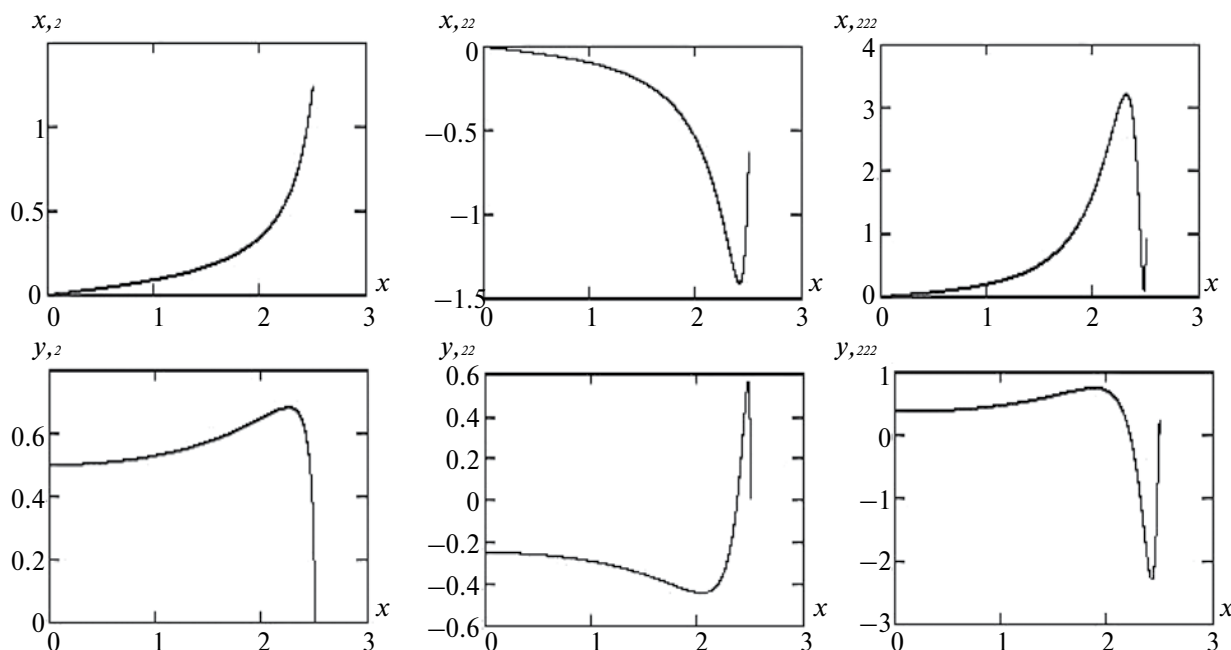


Рис. 15. Производные от x, y по x^1, x^2 для течения с эллиптическими орбитами при $\Omega = 0.16$.

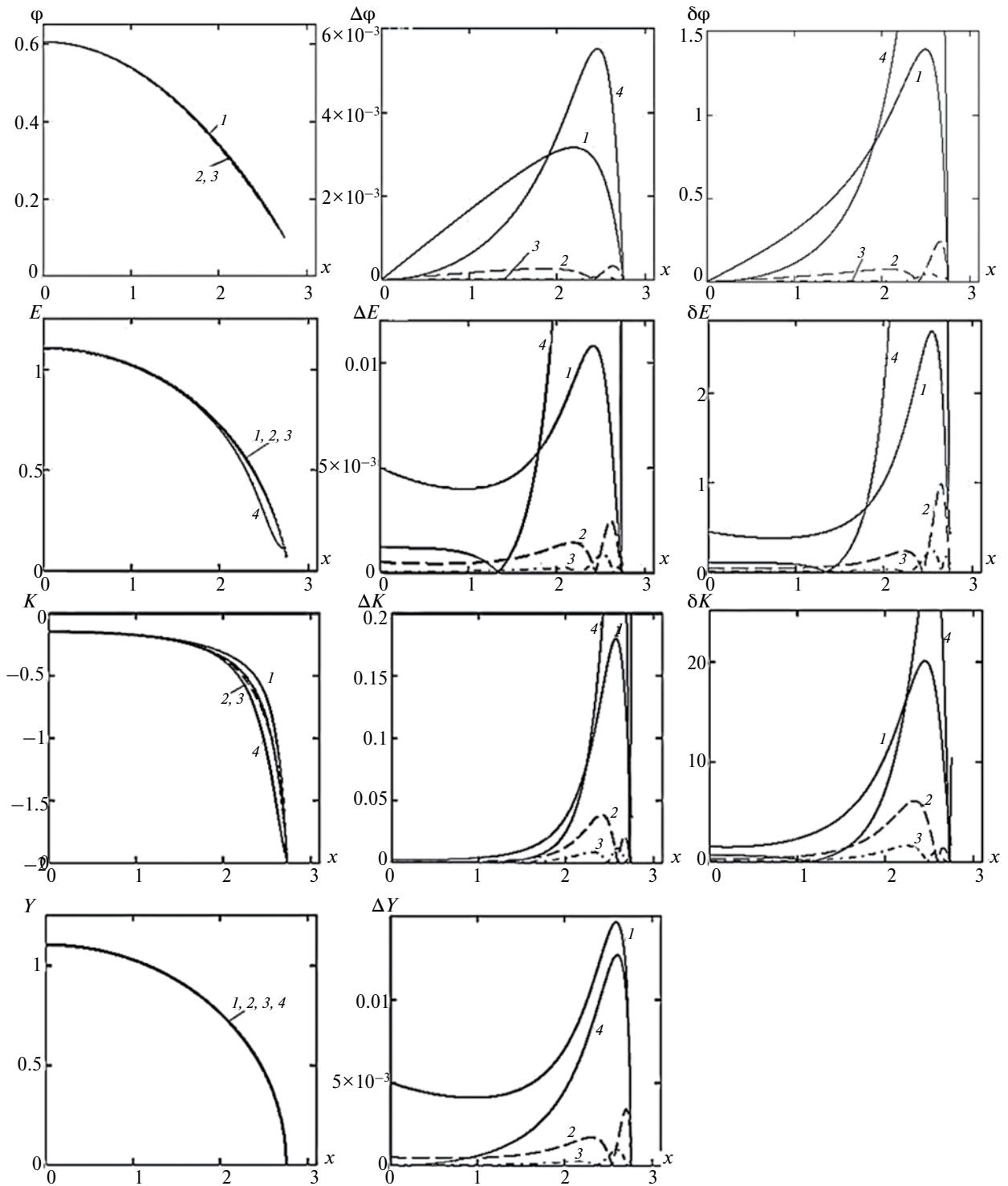


Рис. 16. Функции, характеризующие приближенные модели, для течения с эллиптическими орбитами при $\Omega = 0.16$, $f(0) = 0.1, f(a) = 0.25$; 1, 2, 3 – приближения геометриванной теории, 4 – параксиальная модель.

Все эти пучки нельзя считать узкими по принципу $f \ll L_*$, однако при вычислении потенциала параксиальная модель для четырех вариантов (59) дает ошибку $\delta\phi \sim 7, 9, 13, 10 \%$

соответственно, с существенно меньшей точностью определяя поле и кривизну. Удвоение ширины пучка при $\bar{\Omega} = 0.16$ приводит к увеличению ошибки по ϕ, E, k в 12, 12 и 20 раз.

Таблица 12. Параметры течения с эллиптическими орбитами, $\bar{\Omega} = 0.16$ ($a/b = 2.5$)

$\bar{\Omega} = 0.16, \varphi_{ex0} = 0.097, E_{ex0} = 0.07, k_{ex0} = -2.273, f(0) = 0.1, f(a) = 0.25$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	3.16×10^{-3}	3.23×10^{-4}	8.23×10^{-5}	5.51×10^{-3}
x_Δ	2.167	2.628	2.501	2.45
$\varphi_{ex\Delta}$	0.289	0.141	0.185	0.202
$\varphi_{ap\Delta}$	0.286	0.141	0.185	0.207
$\delta\varphi_m$	1.39	0.24	0.049	3.10
x_δ	2.492	2.657	2.543	2.572
$\delta\varphi_\Delta$	1.09	0.23	0.046	2.73
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.011	2.46×10^{-3}	8.75×10^{-4}	0.11
x_Δ	2.409	2.611	2.516	2.564
$E_{ex\Delta}$	0.465	0.272	0.372	0.324
$E_{ap\Delta}$	0.476	0.274	0.371	0.214
δE_m	2.68	0.98	0.24	65.24
x_δ	2.543	2.645	2.541	2.746
δE_Δ	2.32	0.90	0.24	34.02
δE_0	0.46	0.047	6.03×10^{-3}	65.24
Δk_m	0.18	0.039	0.012	0.34
x_Δ	2.570	2.405	2.591	2.603
$k_{ex\Delta}$	-1.058	-0.679	-1.134	-1.182
$k_{ap\Delta}$	-0.878	-0.718	-1.146	-1.521
δk_m	20.0	6.09	1.63	32.03
x_δ	2.448	2.331	2.245	2.523
δk_Δ	17.00	5.67	1.04	28.76
δk_0	1.55	0.27	0.05	10.44

Таблица 13. Параметры течения с эллиптическими орбитами, $\bar{\Omega} = 0.04$ ($a/b = 5$)

$\bar{\Omega} = 0.04, \varphi_{ex0} = 0.022, E_{ex0} = 8.4 \times 10^{-3}, k_{ex0} = -4.762, f(0) = 0.05, f(a) = 0.25$				
Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\Delta\varphi_m$	1.07×10^{-3}	2.57×10^{-4}	7.52×10^{-5}	7.20×10^{-3}
x_Δ	4.654	5.117	5.026	5.028
$\varphi_{ex\Delta}$	0.135	0.049	0.067	0.066
$\varphi_{ap\Delta}$	0.134	0.048	0.067	0.073
$\delta\varphi_m$	1.37	0.60	0.22	13.40
x_δ	5.085	5.162	5.204	5.137
$\delta\varphi_\Delta$	0.79	0.53	0.11	10.92
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	0.023	0.016	7.26×10^{-3}	0.109
x_Δ	5.027	5.120	5.045	5.110
$E_{ex\Delta}$	0.257	0.179	0.244	0.189
$E_{ap\Delta}$	0.280	0.195	0.236	0.081
δE_m	10.34	9.75	5.88	711.11
x_δ	5.113	5.153	5.190	5.252
δE_Δ	8.91	8.91	2.98	57.35
δE_0	0	0	0	—
Δk_m	1.006	0.726	0.444	1.082
x_Δ	5.115	5.157	5.083	5.246
$k_{ex\Delta}$	-0.038	-1.910	-1.202	-4.496
$k_{ap\Delta}$	-0.439	-1.285	-1.646	-3.414
δk_m	87.13	41.27	37.70	72.94
x_δ	5.027	5.136	5.074	5.083
δk_Δ	69.63	37.99	36.92	24.07
δk_0	0.38	0.032	2.9×10^{-3}	28.44

Таблица 14. Параметры течения с эллиптическими орбитами, $\bar{\Omega} = 0.01$ ($a/b = 10$)

Параметр	Номер приближения			
	1	2	3	4
$\bar{\Omega} = 0.01, \varphi_{ex0} = 5.101 \times 10^{-3}, E_{ex0} = 1.01 \times 10^{-3}, k_{ex0} = -9.901, f(0) = 0.01, f(a) = 0.1$				
$\Delta\varphi_m$	4.61×10^{-5}	8.43×10^{-6}	1.30×10^{-6}	1.22×10^{-3}
x_Δ	9.362	10.027	9.967	9.996
$\varphi_{ex\Delta}$	0.07620	0.01240	0.01830	0.01540
$\varphi_{ap\Delta}$	0.07619	0.01237	0.01832	0.01700
$\delta\varphi_m$	0.25	0.098	0.030	10.077
x_δ	0.028	10.062	10.075	10.05
$\delta\varphi_\Delta$	0.06	0.068	7.10×10^{-3}	7.94
$\delta\varphi_0$	0	0	0	0
ΔE_m	8.14×10^{-3}	4.68×10^{-3}	1.71×10^{-3}	0.045
x_Δ	10.004	10.048	10.066	10.042
$E_{ex\Delta}$	0.1136	0.07340	0.0530	0.08010
$E_{ap\Delta}$	0.1218	0.07804	0.0547	0.03541
δE_m	8.46	7.05	3.86	64.88
x_δ	10.046	10.062	10.075	10.062
δE_Δ	7.16	6.38	3.23	55.80
δE_0	0	0	0	25.00
Δk_m	1.339	0.899	0.380	1.93
x_Δ	10.042	10.062	10.027	10.047
$k_{ex\Delta}$	-3.1585	-4.2897	-2.6241	-3.385
$k_{ap\Delta}$	-1.8199	-3.3909	-3.0041	-5.316
δk_m	54.02	22.74	14.70	61.91
x_δ	10.000	10.055	10.023	10.028
δk_Δ	42.38	20.95	14.48	57.02
δk_0	0.20	0	0	24.50

Точность вычисления кривизны границы является весьма жестким критерием. В трех последних вариантах (59) при указанных значениях δk потенциал и поле определяются с ошибками 0.59, 2.9 %; 0.22, 5.9 %; 0.007, 3.9 %, а отклонение приближенной траектории от точной составляет 2...3 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование точности геометризованных моделей на эталонных точных решениях как при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, так и в бескатодных вариантах, продемонстрировало превосходство этого подхода над классической параксиальной теорией. Геометризованные построения обнаруживают сходимость по приближениям и с высокой точностью (относительная ошибка — десятки доли процента) гарантируют возможность описания потоков, которые не могут быть отнесены к узким в соответствии с неравенством $f \ll L_*$, где

f — ширина пучка, L_* — характерный линейный размер задачи.

Сказанное справедливо и для разномасштабных тестовых проблем, наиболее сложных для приближенного описания, с начальной кривизной оси пучка ~ 10 при градиенте кривизны ~ 300 . Использование третьего приближения теории приводило к повышению точности, поэтому формулировка этого подхода в случаях, не рассмотренных в монографии [14] и упоминаемых в ней работах, представляется актуальной задачей.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В.А. // Прикл. физика. 1997. № 2–3. С. 69.
2. Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др. // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.
3. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В., Тореев А.И., Шаталина С.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 3. С. 344.

4. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1126.
5. Гамаюнов Ю.Г., Патрушева Е.В. // РЭ. 2020. Т. 65. № 5. С. 507.
6. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
7. Овчаров В.Т. // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1368.
8. Овчаров В.Т., Пензяков В.В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 8. С. 1651.
9. Данилов В.Н. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3.
10. Пензяков В.В., Олейников В.И. // РЭ. 1975. Т. 20. № 5. С. 1049.
11. Сыровой В.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 8. С. 999.
12. Сыровой В.А. // РЭ. 2011. Т. 56. № 1. С. 111.
13. Сыровой В.А. // РЭ. 2016. Т. 61. № 7. С. 692.
14. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
15. Сыровой В.А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
16. Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
17. Сыровой В.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
18. Сыровой В.А. // РЭ. 2022. Т. 67. № 6. С. 615.
19. Васьковский А.В., Неганова Л.А., Сыровой В.А. // Прикл. физика. 1998. № 3–4. С. 33.
20. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
21. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1209.
22. Meltzer B. // J. Electr. Contr. 1956. V. 2. № 2. P. 118.
23. Kirstein P.T., Kino G.S. // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 12. P. 1758.
24. Kirstein P.T. // J. Appl. Phys. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
25. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62B. № 355. P. 431.

STUDYING THE ACCURACY OF GEOMETRIZED MODELS OF RIBBON ELECTRON BEAMS

T. M. Saproнова, V. A. Syrovoy*

*All-Russian Electrotechnical Institute – branch of the Russian Federal Nuclear Center All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after academician E.I. Zababakhin,
Krasnokazarmennaya Str., 12, Moscow, 111250 Russia
E-mail: red@cplire.ru

Received July 12, 2022; revised July 12, 2022; accepted August 27, 2022

Using a set of standard exact solutions described by ordinary differential equations and elementary functions, geometrized models of plane electron beams in I -, and W -representations were studied. A comparison is made of the capabilities of the geometrized approach and the paraxial theory.

Keywords: plane electron beams, geometrized models, reference exact solutions, geometrized approach, paraxial theory