РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2024, том 69, № 2, с. 162–166

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ СИГНАЛА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

 В. В. Климов*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190, Российская Федерация

**E-mail: klimov47@list.ru*

Поступила в редакцию 24.04.2022 г.
После доработки 11.11.2022 г.
Принята в печать 18.01.2023 г.

Рассмотрен метод оценивания спектральных параметров полигармонического процесса методом центральных конечных разностей чётного порядка для случая, когда ряд числовых наблюдений достаточно большой, а количество гармонических компонент в исследуемом процессе априори неизвестно.

Ключевые слова: оценивание спектральных параметров, метод конечных разностей, гармонические компоненты, метод наименьших квадратов, матрица Грама

DOI: 10.31857/S0033849424020072, **EDN:** KMLVKC

Рассмотрим модифицированный метод оценивания параметров применительно к случаю, когда ряд числовых наблюдений $y_1, y_2, ..., y_m$ достаточно большой и, соответственно, допускает возможность формирования центральных конечных разностей высокого порядка (много больше, чем это необходимо для метода, описанного в [1]). Положим на начальном этапе рассмотрения, что число N синусоидальных компонент нам известно. Пусть для максимального порядка центральной конечной разности $2l$, которую можно оформить согласно алгоритму [1] на основе имеющегося ряда $y_1, y_2, ..., y_m$, выполняется условие $2l \gg 4N$.

Пусть рассматриваемый процесс можно представить в следующем виде:

$$y_s = y_{cp} + \sum_{i=1}^{N} r_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} sg + \alpha_i\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_i = 4\sin^2\frac{\pi g}{T_i};\ A_i^{(k)} = r_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)}\right),$$

$$i = 1, 2, ..., N;\ k = 1, 2, ..., l.$$

$$B_t^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(k)} \lambda_i^j = \begin{cases} y_{sj}^{(j)} - y_{cp}, \text{ при } t = 0 \\ (-1)^t \Delta^{2t} y_{sk}^{(k)}, \text{ при } t = 1, 2, ..., N, ... \end{cases}$$

$$k = 1, 2, ..., l.$$

Рассмотрим $l + \mathrm{I}$ ($l \gg 2N$) уравнений системы

$$B_k = \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^k;\ k = 0, 1, 2, ..., l. \quad (1)$$

Положим, что величины $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ – корни уравнения

$$\lambda^N + C_{N-1}\lambda^{N-1} + C_{N-2}\lambda^{N-2} + ... + C_1\lambda + C_0 = 0. \quad (2)$$

Возьмем в системе (1) какую-нибудь группу из N+1 последовательных уравнений, например группу

$$\begin{gathered} B_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + ... + A_N\lambda_N^t, \\ B_{t+1} = A_1\lambda_1^{t+1} + A_2\lambda_2^{t+1} + ... + A_N\lambda_N^{t+1}, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{t+N} = A_1\lambda_1^{t+N} + A_2\lambda_2^{t+N} + ... + A_N\lambda_N^{t+N}. \end{gathered} \quad (3)$$

Умножим первое уравнение на C_0, второе – на C_1, ...N-е – на C_{N-1}, тогда, складывая их и добавляя N+1 уравнений системы (3), получим

$$\begin{gathered} C_0B_t + C_1B_{t+1} + ... + C_{N-1}B_{t+N-1} + B_{t+N} = \\ = A_1\lambda_1^t\left(C_0 + C_1\lambda_1 + ... + C_{N-1}\lambda_1^{N-1} + \lambda_1^N\right) + \\ + A_2\lambda_1^t\left(C_0 + C_1\lambda_2 + ... + C_{N-1}\lambda_2^{N-1} + \lambda_2^N\right) + ... \\ + A_N\lambda_N^t\left(C_o + C_1\lambda_N + ... + C_{N-1}\lambda_N^{N-1} + \lambda_N^N\right). \end{gathered} \quad (4)$$

Так как по предположению $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ – корни уравнения (2), то

$$C_0 + C_1\lambda_i + ... + C_{N-1}\lambda_i^{N-1} + \lambda_i^N = 0;\ i = 1,\ 2, .., N. \quad (5)$$

и, значит,

$$C_0 B_t + C_1 B_{t+1} + ... + C_{N-1} B_{t+N-1} + B_{t+N} = 0. \quad (6)$$

Таким же образом, полагая последовательно t равным 0, 1, 2,..., l–N получим систему линейных уравнений с неизвестными $C_0, C_1, ..., C_{N-1}$:

$$\left.\begin{aligned} B_0C_0 + B_1C_1 + ... + B_{N-1}C_{N-1} + B_N = 0,\\ B_1C_0 + B_2C_1 + ... + B_NC_{N-1} + B_{N+1} = 0,\\ \\ B_{l-N}C_0 + B_{l-N+1}C_1 + ... + B_{l-1}C_{N-1} + B_l = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Решаем эту линейную относительно параметров $C_0, C_1, ..., C_{N-1}$ систему по методу наименьших квадратов. При этом учтем, что число уравнений l–N+1 много больше числа неизвестных ($C_0, C_1, ..., C_{N-1}$). Положим, что мы взяли какую-нибудь систему значений $(C_0^*, C_1^*, ..., C_{N-1}^*)$, подставили в уравнение (7) и составили разности

$$\left.\begin{aligned} B_0C_0^* + B_1C_1^* + ... + B_{N-1}C_{N-1}^* + B_N = \varepsilon_1,\\ B_1C_0^* + B_2C_1^* + ... + B_NC_{N-1}^* + B_{N+1} = \varepsilon_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ B_{l-N}C_0^* + B_{l-N+1}C_1^* + ... + B_{l-1}C_{N-1}^* + B_l = \varepsilon_{l-N+1}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Эти разности представляют те ошибки, которые имеют место в наблюдаемых величинах B_N, $B_{N+1}, ..., B_l$ при системе значений $(C_0^*, C_1^*, ..., C_{N-1}^*)$. Составим сумму квадратов разностей

$$F(C_0^*, C_1^*, \ldots, C_{N-1}^*) = \sum_{i=1}^{l-N+1} \varepsilon_i^2 = \bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}, \quad (9)$$

где $\bar{\varepsilon}^T = (\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{l-N+1})$.

Оценки по методу наименьших квадратов получают при минимизации функции (9). Минимум функций (9) получим, приравняв к нулю частные производные

$$\frac{\partial F\left(C_0^*,\ C_1^*, \ldots, C_{N-1}^*\right)}{\partial C_i^*} = 0;\ i = 0,\ 1, \ldots, N-1. \quad (10)$$

Подставляя (8) и (9) в систему уравнений (10), получим нормальную систему уравнений, которую запишем в матричном виде [2]

$$\mathbf{B}_{(l-N+1,N)}^T \mathbf{B}_{l-N+1,N} \bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{B}_{(l-N+1,N)}^T \bar{\mathbf{H}}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{B}_{l-N+1,N} = \begin{Vmatrix} B_0 & B_1 & B_{N-1}\\ B_1 & B_2 & B_N\\ \\ B_{l-N} & B_{l-N+1} & B_{l-1} \end{Vmatrix}; \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{Vmatrix} C_0\\ C_1\\ \ldots\\ C_{N-1} \end{Vmatrix}; \bar{\mathbf{H}} = \begin{Vmatrix} B_N\\ B_{N+1}\\ \\ B_l \end{Vmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{B}_{(l-N+1,N)}^T \mathbf{B}_{l-N+1,N} = \mathbf{K}(N\times N)$ представляет собой таблицу коэффициентов при неизвестных $\bar{\mathbf{C}}^T = (C_0,\ C_1, \ldots, C_{N-1})$ в системе нормальных уравнений и является матрицей Грама для системы векторов [2]

$$\bar{\mathbf{Z}}_K = \begin{Vmatrix} B_K\\ B_{K+1}\\ \ldots\\ B_{l-N+K} \end{Vmatrix}, \quad (13)$$

т.е.

$$\mathbf{K}(N\times N) = \mathbf{B}_{(l-N+1,N)}^T \mathbf{B}_{l-N+1,N} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (\bar{Z}_0, \bar{Z}_0) & (\bar{Z}_0, \bar{Z}_1) & (\bar{Z}_0, \bar{Z}_{N-1})\\ (\bar{Z}_1, \bar{Z}_0) & (\bar{Z}_1, \bar{Z}_1) & (\bar{Z}_1, \bar{Z}_{N-1})\\ \\ (\bar{Z}_{N-1}, \bar{Z}_0) & (\bar{Z}_{N-1}, \bar{Z}_1) & (\bar{Z}_{N-1}, \bar{Z}_{N-1}) \end{Vmatrix}. \quad (14)$$

Для нахождения неизвестных $\bar{\mathbf{C}}^T = (C_0,\ C_1, \ldots, C_{N-1})$ умножим обе части матричного уравнения (11) слева на $\mathbf{K}^{-1}(N\times N)$. Получим

$$\bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{K}^{-1}(N\times N)\mathbf{B}_{(l-N+1,N)}^T \bar{\mathrm{H}}. \quad (15)$$

Решение системы нормальных уравнений (15) определяет те значения $\bar{\mathbf{C}}$*, при которых достигается точка минимума функции $F(\bar{\mathbf{C}})$ (9) в N-мерном пространстве. Функция $F(\bar{\mathbf{C}})$ является неотрицательной квадратичной относительно $\bar{\mathbf{C}}$. Поэтому минимум функции $F(\bar{\mathbf{C}})$ всегда существует, а так как точка минимума обязательно удовлетворяет нормальной системе, то последняя является совместной, т.е. всегда имеет решение. Однако нормальная система может иметь и несколько решений в тех случаях, когда матрица **K** является особенной. Для однозначного определения вектора $\bar{\mathbf{C}}$* из (15) необходимо, чтобы матрица **K** (матрица Грама) была неособенной, т.е. система векторов $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K = 0, 1,\ldots, N-1\}$ была линейно независимой. Только в этом случае существует обратная матрица $\mathbf{K}^{-1}$ и однозначное решение (15).

Рассмотрим, что представляет собой матрица Грама $\mathbf{K}\,(N \times N)$.

Так как $\mathbf{K}(N \times N) = \mathbf{B}^T_{(l-N+1,N)}\mathbf{B}_{l-N+1,N}$, то распишем матрицу $\mathbf{B}_{l-N+1,N}$

$$\mathbf{B}_{l-N+1,N} = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} A_i & \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i & \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^{N-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i & \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^{N} \\ & & \\ \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^{l-N} & \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^{l-N+1} & \sum\limits_{i=1}^{N} A_i\lambda_i^{l-1} \end{Vmatrix}, \quad (16)$$

где $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$,

$$\mathbf{L}_{(l-N+1\times N)} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_N^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{l-N} & \lambda_2^{l-N} & \ldots & \lambda_N^{l-N} \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{L}_{(N\times N)} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \ldots & \lambda_N^{N-1} \end{Vmatrix}. \quad (17)$$

Тогда матрица $\mathbf{K}(N \times N)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(N \times N) &= \mathbf{B}^T_{(l-N+1,N)}\mathbf{B}_{l-N+1,N} = \\ &= \left[\mathbf{L}_{(l-N+1\times N)}\mathbf{A}\mathbf{L}^T_{(N\times N)}\right]^T \times \left[\mathbf{L}_{(l-N+1\times N)}\mathbf{A}\mathbf{L}_{(N\times N)}\right] = \\ &= \mathbf{L}_{(N\times N)}\mathbf{A}\mathbf{L}^T_{(l-N+1\times N)}\mathbf{L}_{l-N+1\times N)}\mathbf{A}\mathbf{L}^T{}_{(N\times N)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Определитель матрицы $\mathbf{K}(N \times N)$. Учитывая, что определитель матрицы

$\mathbf{L}(N \times N)$ – определитель Вандермонда

$$\det \mathbf{L}(N \times N) = \prod_{1 \le j < i \le N} \left(\lambda_i - \lambda_j\right),$$

а определитель матрицы **A** – $\det \mathbf{A} = A_1 A_2 \ldots A_N$, тогда можно записать в виде

$$\det \mathbf{K}(N \times N) = A_1^2 A_1^2 \ldots A_1^2 \prod_{1 \le j < i \le N} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \det \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{l-N} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{l-N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_N & \ldots & \lambda_N^{l-N} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{l-N} & \lambda_2^{l-N} & \ldots & \lambda_N^{l-N} \end{Vmatrix} \quad (19)$$

Для вычисления определителя, стоящего в правой части выражения (19), воспользуемся формулой Бине-Коши [2]

$$\begin{aligned} &\det \mathbf{L}^T_{(l-N+1\times N)}\mathbf{L}_{(l-N+1\times N)} = \\ &= \sum_{1 \le m1 < m2 < \ldots < mN \le l-N+1} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & N \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_N \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & N \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_N \end{pmatrix}$ – минор порядка N матрицы $\mathbf{L}_{(l-N+1\times N)}$.

Таким образом, определитель матрицы Грама $\det \mathbf{K}(N \times N)$ можно записать в виде

$$\det \mathbf{K}(N \times N) = A_1^2 A_2^2 \ldots A_N^2 \prod_{1 \le j < i \le N} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2 \det \sum_{1 \le m1 < m2 < \ldots < mN \le l-N+1} L^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & N \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_N \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В предположении $A_i \ne 0$, $\lambda_i \ne \lambda_j$; $i, j = 1, N$, $\det \mathbf{K}(N \times N) \ne 0$ так как среди миноров порядка N матрицы $\mathbf{L}(l - N + 1 \times N)$ обязательно имеются ненулевые, таким образом получим, что при числе гармоник N определитель матрицы Грама положителен ($\det \mathbf{K}(N \times N) > 0$) и нормальная система уравнений (11) имеет единственное решение (15).

Покажем, что последовательность определителей матрицы Грама $\{\det \mathbf{K}(t \times t), t = 1, 2, 3,\ldots\}$ позволяет определить число гармоник. Пусть неизвестное число компонент равно N. По наблюдаемому отрезку временного ряда y_1, $y_2,\ldots,$ y определяется последовательность центральных конечных разностей четного порядка и на их основе формируется последовательность B_0, B_1, $B_2,\ldots,$ B_l. Из последовательности $\{\det \mathbf{B}_i,\ i=0,\ 1,\ 2,..,l\}$ строятся векторы $\{\bar{\mathbf{Z}}_K,\ K=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ (13), причем их размерность $(l–p+1)$ выбирается больше предполагаемого максимально возможного числа P синусоидальных составляющих ($l–p+1 > P_{\max}$). На основе векторов $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ формируем последовательность матриц Грама $\{\det \mathbf{K}(t\times t),\ t=1,\ 2,\ 3,\ldots\}$, где

$$\mathbf{K}(t\times t)=\begin{Vmatrix}(\bar Z_0,\bar Z_0) & (\bar Z_0,\bar Z_1) & \ldots & (\bar Z_0,\bar Z_{t-1})\\ (\bar Z_1,\bar Z_0) & (\bar Z_1,\bar Z_1) & \ldots & (\bar Z_1,\bar Z_{t-1})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\bar Z_{t-1},\bar Z_0) & (\bar Z_{t-1},\bar Z_1) & \ldots & (\bar Z_{t-1},\bar Z_{t-1})\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}B_0 & B_1 & \ldots & B_{l-p}\\ B_1 & B_2 & \ldots & B_{l-p+1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ B_{t-1} & B_t & \ldots & B_{l-p+t-1}\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix}B_0 & B_1 & \ldots & B_{t-1}\\ B_1 & B_2 & \ldots & B_t\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ B_{l-p} & B_{l-p+1} & \ldots & B_{l-p+t-1}\end{Vmatrix}= \quad , \tag{22}$$

$$=\mathbf{B}^T_{(l-p+1,t)}\mathbf{B}_{(l-p+1,t)}=\mathbf{L}_{(t\times N)}\mathbf{A}\mathbf{L}^T_{(l-p+1\times N)}\mathbf{L}_{(l-p+1\times N)}\mathbf{A}\mathbf{L}^T{}_{(t\times N)}$$

где

$$\mathbf{L}_{(t\times N)}=\begin{Vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \ldots & \lambda_N^{t-1}\end{Vmatrix};\quad \mathbf{L}_{(l-p+1\times N)}=\begin{Vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \lambda_1^{l-p} & \lambda_2^{l-p} & \ldots & \lambda_N^{l-p}\end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Вычислим определитель det $\mathbf{K}(t\times t)$. Используя (19) и (21), можно показать, что

$$\det\mathbf{K}(t\times t)=A_1^2A_2^2\ldots A_N^2\sum_{1\le m1<m2<\ldots<mN\le l-N+1}L^2\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & N\\ m_1 & m_2 & \ldots & m_N\end{pmatrix}\det\left[\mathbf{L}(t\times N)\mathbf{L}^T(t\times N)\right], \tag{24}$$

Используя формулу Бине-Коши для вычисления (24), получим

$$\det\mathbf{K}(t\times t)=A_1^2A_2^2\ldots A_N^2\sum_{1\le m1<m2<\ldots<mN\le l-N+1}L^2\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & N\\ m_1 & m_2 & \ldots & m_N\end{pmatrix}\sum_{1\le l1<l2<\ldots<lt\le N}L^2\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & t\\ l_1 & l_2 & \ldots & l_N\end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $L\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & t\\ l_1 & l_2 & \ldots & l_N\end{pmatrix}$ – минор порядка t матрицы $\mathbf{L}(t\times N)$.

Если предположить, что $A_i\ne 0$, $\lambda_i\ne\lambda_j$; i, $j=1,\ N$, $\det\mathbf{K}(N\times N)>0$ и $t\le N$, то получим, что как среди миноров порядка T матрицы $\mathbf{L}(t\times N)$, так и среди миноров порядка N матрицы $\mathbf{L}(l-p+1\times N)$, обязательно найдутся нулевые. Если же $t>N$, то $\det\mathbf{K}(t\times t)=0$. Таким образом, определение числа N сводится к следующему. По наблюдаемому отрезку y_1, $y_2,\ldots,y_m$ определяется последовательность центральных конечных разностей четного порядка, формируется последовательность B_0, B_1, $B_2,\ldots$, B_l, на основе которой строят векторы $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ согласно (13), причем размерность их $(l–p+1)$ предполагается больше максимального возможного числа P компонент в данном временном ряду. На основе векторов $\{\bar{\mathbf{Z}}_K, K=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\}$ формируется последовательность матриц Грама $\{\mathbf{K}(t\times t),\ t=1,\ 2,\ 3,\ldots\}$

$$\mathbf{K}(t\times t)=\begin{Vmatrix}\sum_{i=0}^{l-p}B_i^2 & \sum_{i=0}^{l-p}B_i\,B_{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^{l-p}B_i\,B_{i+t-1}\\ \sum_{i=0}^{l-p}B_{i+1}B_i & \sum_{i=0}^{l-p}B_{i+1}^2 & \dots & \sum_{i=0}^{l-p}B_{i+1}B_{i+t-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum_{i=0}^{l-p}B_{i+t-1}B_i & \sum_{i=0}^{l-p}B_{i+t-1}B_{i+1} & \dots & \sum_{i=0}^{l-p}B_{i+t-1}^2\end{Vmatrix};\quad t=1,\ 2,\dots,$$

вычисляются определители $\det\mathbf{K}(t\times t)$. Процесс обрывают, как только $\det\mathbf{K}(S\times S)=0$. Последнее означает, что число гармоник равно S–1. Зная N, можно определить вектор $\bar{\mathbf{C}}$ (15), корни $\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_{s-1}$ уравнения (5). Далее определяются периоды $T_1,\ T_2,\dots,T_{s-1}$. Такой подход позволяет проводить надежное и однозначное определение числа параметров тех компонент, для которых $A_i\neq 0;\ i=1,\ N$. В силу того, что возможна ситуация, когда выполняется $A_i=0$, следует при оценивании параметров повторять описанную процедуру для нескольких значений $y_{s1},y_{s2},\dots,y_{sk}$ и окончательно суждение выносить на основе анализа совместных результатов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. Наука, М., 1978.
3. *Абрамов А.Д., Климов В.В., Коновалов Л.Н.* Математическое моделирование в задачах радиотехники и электроники/Под ред В.Ф. Крапивина. М.ИРЭ АН СССР, 1984. С. 152.

STUDY OF SPECTRAL STRUCTURE SIGNAL BY FINITE DIFFERENCE METHOD

V. V. Klimov*

Fryazino branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics Russian Academy of Sciences Fryazino, Moscow oblast, 140190 Russia

**E-mail: klimov47@list.ru*

Received April 24, 2022; revised November 11, 2022; accepted January 18, 2023

A method for estimating the spectral parameters of a polyharmonic process by the method of central finite differences of even order is considered for the case when the series of numerical observations is quite large and the number of harmonic components in the process under study is a priori unknown.

Keywords: estimation of spectral parameters, finite difference method, harmonic components, least squares method, Gram matrix