

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 533.9

К ТЕОРИИ ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА
В ПОПЕРЕЧНОМ ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ© 2023 г. И. Н. Карташов^a, *, М. В. Кузелев^a^a Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 2, Москва, 119991 Российская Федерация

*E-mail: igorkartashov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.

После доработки 13.02.2023 г.

Принята к публикации 03.03.2023 г.

Рассмотрены электродинамические свойства плазмы высокочастотного емкостного разряда с магнитным полем вдоль пластин конденсатора. Вычислен комплексный импеданс такой системы. На основе эквивалентной электротехнической схемы плазменного конденсатора проанализированы резонансные свойства разряда. Продемонстрирована роль ионов в устойчивости дрейфующего в скрещенных электрическом и магнитном полях потока электронов.

DOI: 10.31857/S0033849423120094, EDN: HVCWTQ

ВВЕДЕНИЕ

Внешнее магнитное поле, перпендикулярное разрядному току, существенно влияет на электромагнитные свойства высокочастотного емкостного (ВЧЕ) разряда, что обусловлено в первую очередь затрудненностью поляризации плазмы поперек магнитного поля. В определенном диапазоне частот продольное электрическое поле слабо экранируется магнитоактивной плазмой в направлении, перпендикулярном внешнему магнитному полю, что наводит на мысль о возможном улучшении некоторых параметров ВЧЕ-разряда применением внешнего магнитного поля. Следует заметить, что в разрядах постоянного тока использование внешнего магнитного поля перпендикулярного разрядному току давно показало свою эффективность (даже необходимость) в стационарных плазменных двигателях (СПД) [1]. В этих двигателях существенной оказывается еще одна роль внешнего магнитного поля: поперечный дрейф замагниченных электронов плазмы в скрещенных постоянных внешнем магнитном и разрядном электрическом полях. Незамагниченные же ионы плазмы свободно ускоряются электрическим полем разряда, создавая тем самым тягу СПД [1].

В связи с задачей разработки низкоорбитальных космических аппаратов возникла идея замены рабочего газа СПД, а именно, инертный газ заменить на атмосферный воздух. Для преодоления возникших в связи с такой заменой трудностей бы-

ло предложено вместо разряда постоянного тока на базе стандартной конструкции СПД организовать ВЧЕ-разряд. Параметры холловских двигателей на ВЧЕ-разряде с поперечным магнитным полем исследованы в работе [2].

В данной работе не ставится задача расчета плазменного двигателя на ВЧЕ-разряде с поперечным магнитным полем. В реальной геометрии плазменного двигателя получить какие-либо аналитические результаты вряд ли возможно. Однако основной элемент плазменного двигателя — сам ВЧЕ-разряд в поперечном магнитном поле — в простейшей геометрии исследовать не сложно, чему и посвящена эта работа. Мы совсем не обсуждаем здесь вопросов создания и поддержания плазмы разряда, полностью действуя в духе работ [3, 4]. Фактически речь пойдет об электромагнитных, точнее электротехнических, свойствах плазменного конденсатора простейшей геометрии, помещенного в однородное внешнее магнитное поле.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА

Рассмотрим плоский плазменный конденсатор, помещенный в однородное внешнее магнитное поле, параллельное плоскостям обкладок конденсатора $x = 0$ и $x = d$. Пусть внешнее магнитное поле $\vec{B}_0 = \{0, 0, B_0\}$ направлено вдоль координатной оси z . Считая плазму холодной и пренебрегая движени-

ем тяжелых ионов, запишем следующую систему уравнений для скалярного потенциала электрического поля $\phi(t, x, y, z)$, гидродинамической плотности $N(t, x, y, z)$ и компонент гидродинамической скорости $V_{x,y,z}(t, x, y, z)$ электронов плазмы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= -4\pi e(N - n_{0e}), \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(NV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(NV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(NV_z) &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= \\ &= \Omega_e V_y - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_e V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= \\ &= -\Omega_e V_x - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial y} - v_e V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial z} - v_e V_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega_e = eB_0/mc$ – электронная циклотронная частота, v_e – эффективная частота столкновений электронов (с нейтральными атомами и ионами), n_{0e} – невозмущенная плотность электронов плазмы. Пока считаем, что плотность плазмы в конденсаторе не зависит от координат. Полагая, что одна из обкладок конденсатора заземлена, а другая подсоединена к внешнему источнику синусоидального напряжения частоты ω , для скалярного потенциала запишем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \phi(t, 0, y, z) &= 0, \\ \phi(t, d, y, z) &= -\text{Re}[U_0 \exp(-i\omega t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если расстояние между обкладками конденсатора мало по сравнению с их поперечным размером, то можно пренебречь краевыми эффектами (т.е. принять $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$) и записать систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -4\pi e(N - n_{0e}), \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(NV_x) &= 0, \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \Omega_e V_y - \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_e V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} &= -\Omega_e V_x - v_e V_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} &= -v_e V_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы уравнений (3) возьмем следующее:

$$\begin{aligned} \phi_0(t, x) &= -E_0 x \exp(-i\omega t), \\ N(t, x, y, z) &= n_{0e}, \\ V_z(t, x, y, z) &= 0, \\ V_x(t, x, y, z) &= i \frac{e}{m} E_0 \exp(-i\omega t) \times \\ &\times \frac{(\omega + iv_e)}{(\omega + iv_e)^2 - \Omega_e^2} \equiv V_{0x}(t), \\ V_y(t, x, y, z) &= \frac{e}{m} E_0 \exp(-i\omega t) \times \\ &\times \frac{\Omega_e}{(\omega + iv_e)^2 - \Omega_e^2} \equiv V_{0y}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $E_0 = U_0/d$, а комплексная амплитуда U_0 определена в (2). Отметим, что поскольку для решений (4) нелинейные члены в уравнениях (3) равны нулю, мы записали эти решения в комплексной форме, не выделяя вещественную часть. Вообще говоря, решение (4) не является единственным ввиду наличия производных по x в системе (3) и возможности постановки различных граничных условий для скорости. Если амплитуда колебаний частиц во внешнем электрическом поле и радиус ларморовского вращения малы по сравнению с d , то зависимость от координаты x в гидродинамической скорости также можно пренебречь и считать систему квазиодномерной, что и было сделано.

2. ИМПЕДАНС ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА

Наличие скорости $V_{0x}(t)$ приводит к появлению дополнительных поляризационных зарядов на обкладках конденсатора. Плотность поляризационного тока определяется формулой

$$\begin{aligned} j_p(t) &= \frac{\partial P_x}{\partial t} = en_{0e} V_{0x}(t) = \\ &= i \frac{\omega_{Le}^2}{4\pi} E_0 \exp(-i\omega t) \frac{(\omega + iv_e)}{(\omega + iv_e)^2 - \Omega_e^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ω_{Le} – ленгмюровская частота электронов плазмы, а P_x – компонента вектора поляризации. Из (5) и формулы $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$ находим выражение для нормальной к обкладкам конденсатора компоненты вектора индукции электрического поля

$$D_x = \varepsilon_{\perp}(\omega) E_0 \exp(-i\omega t), \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2(\omega + iv_e)}{\omega[(\omega + iv_e)^2 - \Omega_e^2]}. \quad (7)$$

Используя далее граничное условие на обкладке конденсатора

$$D_x(x=0) = 4\pi\sigma_0$$

(σ_0 — поверхностная плотность электрического заряда), получаем следующее соотношение:

$$q_0 = \varepsilon_{\perp} \frac{S}{4\pi d} U_0, \quad (8)$$

где S — площадь обкладки конденсатора, q_0 — комплексная амплитуда электрического заряда на обкладке (с учетом временной зависимости, как это следует из (2), заряд обкладки конденсатора равен $\text{Re}[q_0 \exp(-i\omega t)]$). При получении (8) считалось, что $\sigma_0 = q_0/S$, что согласуется с предположением об отсутствии в конденсаторе краевых эффектов.

По определению емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом на обкладке и разностью потенциалов между обкладками. Таким образом, для емкости плазменного конденсатора имеем

$$C_p = \varepsilon_{\perp} C_0, \quad (9)$$

где $C_0 = S/(4\pi d)$ — емкость соответствующего вакуумного конденсатора.

Известно, что структура тензора диэлектрической проницаемости холодной однородной магнитоактивной плазмы определяется формулой [5, 6]

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(\omega) & \varepsilon_{xy}(\omega) & 0 \\ \varepsilon_{yx}(\omega) & \varepsilon_{yy}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь $i, j = x, y, z$, а $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$, где $\varepsilon_{\perp}$ совпадает с величиной (7). Также известно, что емкость конденсатора с однородным изотропным диэлектрическим заполнением отличается от емкости соответствующего вакуумного конденсатора множителем ε_0 , где ε_0 — диэлектрическая проницаемость заполнения [7]. Формула (9) показывает, что аналогичный результат имеет место и в случае конденсатора, заполненного анизотропной магнитоактивной плазмой.

Предположим теперь, что рассматриваемый плазменный конденсатор включен в электрическую цепь, по которой протекает ток на частоте ω и с комплексной амплитудой I_0 . Поскольку амплитуды тока в цепи и поверхностного заряда на обкладке конденсатора связаны соотношением $I_0 = -i\omega q_0$, то формулу (8) можно записать в форме закона Ома для участка цепи $U_0 = I_0 Z_p$, где

$$Z_p = \frac{i}{\omega C_p} = \frac{i}{C_0 \omega} \frac{(\omega + i\nu_e)^2 - \Omega_e^2}{[(\omega + i\nu_e)^2 - \Omega_e^2] - \omega_{Le}^2(\omega + i\nu_e)} \quad (11)$$

— импеданс плазменного конденсатора. В бесстолкновительном пределе формула для импеданса принимает вид

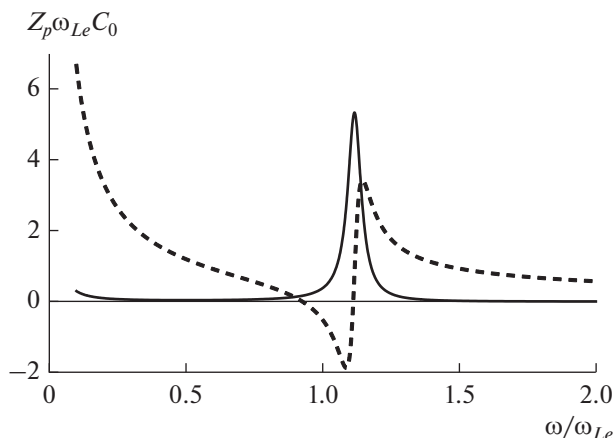


Рис. 1. Импеданс плазменного конденсатора: $\text{Re } Z_p$ (сплошная кривая), $\text{Im } Z_p$ (штриховая кривая).

$$Z_p = \frac{i}{\omega C_p} = \frac{i}{\omega C_0} \frac{\omega^2 - \Omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_g^2}, \quad (12)$$

где $\Omega_g = \sqrt{\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2}$ — верхняя гибридная частота.

Формулы (11) и (12) несложно обобщить на случай, когда плазма заполняет конденсатор не полностью. Пусть однородный слой плазмы отделен от обкладок конденсатора одинаковыми слоями изотропного диэлектрика с проницаемостью ε_0 , поэтому

$$\omega_{Le}^2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \Delta, \\ \omega_{Le}^2 = \text{const}, & \Delta \leq x \leq d - \Delta, \\ 0, & d - \Delta < x < d. \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, что если на границах слоя плазмы поместить бесконечно тонкие проводящие плоскости, то емкость конденсатора не изменится, но плазменный конденсатор с диэлектрическими слоями превратится в последовательное соединение двух диэлектрических конденсаторов и одного конденсатора с однородным плазменным заполнением. Так как при последовательном соединении импедансы складываются, то для импеданса плазменного конденсатора с диэлектрическими слоями имеем

$$Z_p = 2 \frac{i}{\omega C_{\Delta}} + \frac{i}{\omega \varepsilon_{\perp} C_0'}, \quad (14)$$

где

$$C_{\Delta} = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi \Delta}, \quad C_0' = \frac{S}{4\pi(d - 2\Delta)}. \quad (15)$$

На рис. 1 изображен импеданс плазменного конденсатора со следующими параметрами: $\nu_e/\omega_{Le} = 0.05$, $\Omega_e/\omega_{Le} = 0.5$, $\Delta/d = 0.3$, $\varepsilon_0 = 1$.

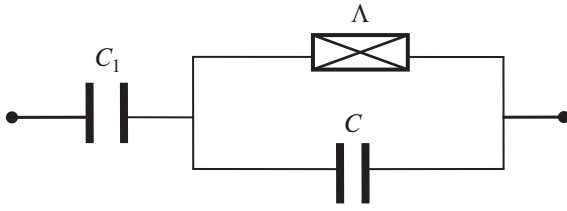


Рис. 2. Эквивалентная схема плазменного конденсатора.

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА. РЕЗОНАНСЫ

Рассмотрим схему, изображенную на рис. 2, где C , C_1 и Λ обычные (не плазменные) емкости и индуктивность.

Комплексный импеданс для изображенной схемы определяется формулой

$$Z_0 = \frac{i}{\omega C_\Sigma} \frac{\omega^2 - \beta \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (16)$$

где $C_\Sigma = C_1 C / (C_1 + C)$, $\beta = C / (C_1 + C)$, а $\omega_0 = 1/\sqrt{\Lambda C}$. Сравнивая формулы (16) и (12), видим их полную тождественность, если положить

$$\left. \begin{aligned} C_\Sigma &= C_0 \\ \omega_0^2 &= \Omega_g^2 \\ \beta \omega_0^2 &= \Omega_e^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} C &= C_0 \Omega_g^2 / \omega_{Le}^2 \\ C_1 &= C_0 \Omega_g^2 / \Omega_e^2 \\ \Lambda &= (\Omega_g^2 C_0)^{-1} \omega_{Le}^2 / \Omega_g^2 \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Таким образом, эквивалентной схемой однородного плазменного конденсатора в поперечном внешнем магнитном поле является схема, представленная на рис. 2. Параметры эквивалентной схемы однозначно определяются формулами (17). В случае плазменного конденсатора с диэлектрическими прослойками, формулы (17) по-прежнему имеют место, только в эквивалентной схеме последовательно с конденсатором C_1 следует подключить две емкости C_Δ .

Формулы (17) и электрическая схема на рис. 2 применимы, если столкновениями в плазме можно пренебречь. Эквивалентную схему плазменного конденсатора со столкновениями можно сконструировать включением дополнительных активных сопротивлений, в первую очередь активного сопротивления последовательного индуктивности Λ . Мы не будем приводить здесь соответствующие схемы и формулы, поскольку в разных частотных диапазонах они оказываются неодинаковыми, в отличие от “бесстолкновительной” схемы рис. 2, справедливой при любой частоте ω .

Импеданс (12) и эквивалентный импеданс (16) имеют ноль и полюс. В случае импеданса (16) ноль соответствует резонансу напряжений, а по-

люс — резонансу токов в схеме, представленной на рис. 2. Следовательно, такие же резонансы имеют место и в плазменном конденсаторе в поперечном внешнем магнитном поле. Резонанс напряжений имеет место при

$$\omega = \Omega_e, \quad (18)$$

а резонанс токов — при

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}. \quad (19)$$

При $v_e = 0$ в точке

$$\omega = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \Omega_e^2 + 2[\omega_{Le}^2 - (\epsilon_0 - 1)\Omega_e^2]\Delta/d}{\epsilon_0 - 2(\epsilon_0 - 1)\Delta/d}} \quad (20)$$

обращается в ноль и импеданс (14). Последняя формула дает условие резонанса напряжений в конденсаторе с диэлектрическими зазорами, а условие резонанса токов по-прежнему дается формулой (19). При $\epsilon_0 = 1$ и $\Omega_e = 0$ выражение (20) переходит в известное условие геометрического резонанса $\omega = \omega_{Le} \sqrt{2\Delta/d}$ [8].

На рис. 1 резонансу (19) соответствует точка, в которой вещественная часть импеданса достигает максимального значения, а резонансу (20) соответствует точка, в которой обращается в ноль мнимая часть импеданса. Заметим, что формулы (18)–(20) получены для случая бесстолкновительной плазмы, когда $v_e = 0$ и вещественная часть импеданса тождественно равна нулю. Однако при $v_e \ll \omega$ резонансные точки, показанные на рис. 1 и определяемые формулами (19) и (20), с точностью до величин v_e/ω совпадают.

Заметим, что понятие импеданса, так же как и само понятие высокочастотного разряда, имеют смысл только в квазистационарной области частот, которую можно определить неравенством

$$\frac{\omega}{c} d \ll 1. \quad (21)$$

Очевидно, что в соответствии с формулами (18)–(20) о резонансах напряжений и токов в плазменном конденсаторе уместно говорить только в том случае, когда электронная циклотронная частота Ω_e и электронная ленгмюровская частота ω_{Le} сами попадают в квазистационарную область. Например, в случае упомянутых ранее экспериментов [2] частота ω безусловно принадлежит квазистационарному диапазону, а Ω_e и ω_{Le} существенно выше. В этом случае для диэлектрической проницаемости (7) можно записать

$$\epsilon_\perp(\omega) = 1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \left(1 + i \frac{v_e}{\omega} \right). \quad (22)$$

При этом резонансные свойства конденсатора вообще не проявляются, а его эквивалентная схема

с учетом столкновений сводится к последовательному соединению емкости и активного сопротивления.

4. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Можно сказать, что формулы (4) описывают невозмущенное (равновесное) состояние плазмы и поля в рассматриваемом конденсаторе. Эти формулы являются точным решением нелинейной системы (3), а значит, и полной системы (1), если конечно пренебречь краевыми эффектами. Встает вопрос об устойчивости состояния, описываемого формулами (4). Попытаемся частично ответить, пренебрегая, как и прежде, движением ионов плазмы и считая, что плазма заполняет конденсатор полностью (без диэлектрических зазоров), а также полагая $v_e = 0$.

При наличии возмущений ищем решения уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, y, z) &= \text{Re}[\varphi_0(t, x)] + \\ &+ \tilde{\varphi}(t, x) \exp(ik_y y + ik_z z), \\ V_x(t, x, y, z) &= \text{Re}[V_{0x}(t)] + \\ &+ \tilde{V}_x(t, x) \exp(ik_y y + ik_z z), \\ V_y(t, x, y, z) &= \text{Re}[V_{0y}(t)] + \\ &+ \tilde{V}_y(t, x) \exp(ik_y y + ik_z z),\end{aligned}\quad (23)$$

$$V_z(t, x, y, z) = \tilde{V}_z(t, x) \exp(ik_y y + ik_z z),$$

$$N(t, x, y, z) = n_{0e} + \tilde{N}(t, x) \exp(ik_y y + ik_z z),$$

где величины со знаком $\sim$ обозначают малые возмущения. При написании формул (23) мы считали конденсатор безграничным по координатам y и z , что согласуется с исходным предположением об отсутствии краевых эффектов. В линейном по возмущениям приближении из уравнений (1) имеем следующую систему для возмущений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - (k_y^2 + k_z^2) \tilde{\varphi} &= -4\pi e \tilde{N}, \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \left(n_{0e} \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + V_{0x}' \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \right) + \\ &+ ik_y (n_{0e} \tilde{V}_y + V_{0y}' \tilde{N}) + ik_z n_{0e} \tilde{V}_z = 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial t} + V_{0x}' \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + ik_y V_{0y}' \tilde{V}_x &= \Omega_e \tilde{V}_y - \frac{e}{m} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial t} + V_{0x}' \frac{\partial \tilde{V}_y}{\partial x} + ik_y V_{0y}' \tilde{V}_y &= -\Omega_e \tilde{V}_x - ik_y \frac{e}{m} \tilde{\varphi}, \\ \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial t} + V_{0x}' \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial x} + ik_y V_{0y}' \tilde{V}_z &= -ik_z \frac{e}{m} \tilde{\varphi}.\end{aligned}\quad (24)$$

Здесь штрихом обозначены вещественные части скоростей V_{0x} и V_{0y} . Если рассматривать систему (24)

как краевую задачу по координате x , то ее исследование окажется весьма сложным. Учитывая упоминавшуюся выше квазиоднородность системы, поступим по-другому. Будем рассматривать всю схему, включающую плазменный конденсатор, источник напряжения, подводящие провода и т.п., как “кольцевую” систему, по которой распространяется некоторая волна. В этом случае зависимость возмущений от координаты x можно описать функцией $\exp(ik_x x)$. Тогда, исключая из (24) возмущение потенциала, несложно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{n}}{dt} + i(k_x \tilde{V}_x + k_y \tilde{V}_y + k_z \tilde{V}_z) + iW(t)\tilde{n} &= 0, \\ \frac{d\tilde{V}_x}{dt} + iW(t)\tilde{V}_x &= \Omega_e \tilde{V}_y - \frac{ik_x}{k^2} \omega_{Le}^2 \tilde{n}, \\ \frac{d\tilde{V}_y}{dt} + iW(t)\tilde{V}_y &= -\Omega_e \tilde{V}_x - \frac{ik_y}{k^2} \omega_{Le}^2 \tilde{n}, \\ \frac{d\tilde{V}_z}{dt} + iW(t)\tilde{V}_z &= -\frac{ik_z}{k^2} \omega_{Le}^2 \tilde{n}.\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, $\tilde{n} = \tilde{N}/n_{0e}$, а

$$\begin{aligned}W(t) &= k_x V_{0x}' + k_y V_{0y}' = \\ &= \frac{e}{m} \frac{\text{Re}[(ik_x \omega + k_y \Omega_e) E_0 \exp(-i\omega t)]}{\omega^2 - \Omega_e^2}.\end{aligned}\quad (26)$$

Несложно видеть, что заменой

$$\tilde{A}(t) \rightarrow \tilde{A}(t) \exp\left(-i \int W(t) dt\right),\quad (27)$$

($\tilde{A}(t)$ — любое из входящих в систему (25) возмущений) система преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{n}}{dt} + i(k_x \tilde{V}_x + k_y \tilde{V}_y + k_z \tilde{V}_z) &= 0, \\ \frac{d\tilde{V}_x}{dt} &= \Omega_e \tilde{V}_y - \frac{ik_x}{k^2} \omega_{Le}^2 \tilde{n}, \\ \frac{d\tilde{V}_y}{dt} &= -\Omega_e \tilde{V}_x - \frac{ik_y}{k^2} \omega_{Le}^2 \tilde{n}, \\ \frac{d\tilde{V}_z}{dt} &= -\frac{ik_z}{k^2} \omega_{Le}^2 \tilde{n}.\end{aligned}\quad (28)$$

Полагая входящие в (28) возмущения $\sim \exp(-i\tilde{\omega}t)$, стандартным образом получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(k_x^2 + k_y^2) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\tilde{\omega}^2 - \Omega_e^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\tilde{\omega}^2} \right) = 0. \quad (29)$$

Последнее уравнение описывает так называемые косые ленгмюровские волны [9], но в силу замены (27) это — волны потока электронов с осциллирующей направленной скоростью. Поскольку частоты $\tilde{\omega}$, определяемые уравнением (29), всегда вещественные, то неустойчивость в плазменном

конденсаторе отсутствует. Правда результат этот получен в рамках весьма жестких предположений: неподвижные ионы, полное заполнение конденсатора плазмой, описание зависимости возмущений от координаты x функцией $\exp(ik_x x)$.

В качестве примера рассмотрим, к чему может привести учет движения ионов. При этом ограничимся стационарным случаем $\omega = 0$, имеющим прямое отношение к процессам в СПД. Хотя скорость дрейфа ионов такая же, как и дрейфовая скорость электронов, ионы плазмы можно считать немагнитными. Дело в том, что дрейфовое движение ионов нивелируется другими движениями, а именно — тепловым движением и движением, обусловленным возмущением самосогласованного электрического поля. Поэтому распределение ионов плазмы по скоростям считаем изотропным.

В этом случае тензор диэлектрической проницаемости плазмы получается прибавлением к диагональным членам тензора диэлектрической проницаемости электронов ионного вклада, равного $-\omega_{Li}^2/\tilde{\omega}^2$, где ω_{Li} — ионная ленгмюровская частота. Электронная диэлектрическая проницаемость получается из уравнений (25), в которых при $\omega = 0$ будет $W(r) = -k_y V_d$, где $V_d = eE_0/m\Omega_e$ — скорость дрейфа. В результате несложных вычислений для поперечной и продольной (поперек и вдоль внешнего магнитного поля) компонент тензора диэлектрической проницаемости электрон-ионной плазмы с анизотропными электронами и изотропными ионами получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\perp} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2 - \Omega_e^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2}, \\ \epsilon_{\parallel} &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2}.\end{aligned}\quad (30)$$

Как известно, дисперсионное уравнение для определения частот $\tilde{\omega}$ системы с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_{\perp}$ и $\epsilon_{\parallel}$ в потенциальном приближении имеет вид $(k_x^2 + k_y^2)\epsilon_{\perp} + k_z^2\epsilon_{\parallel} = 0$ [10]. Откуда, с учетом формул (30), получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2} - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2 - \Omega_e^2} - \\ - \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2} = 0,\end{aligned}\quad (31)$$

при решении которого следует считать, что выполнено неравенство $\omega_{Li}^2 \ll \omega_{Le}^2$. Несложно видеть, что дисперсионное уравнение (31) имеет комплексные решения относительно частоты $\tilde{\omega}$,

т.е. описывает неустойчивую систему. Рассмотрим два частных случая.

В случае если доминирующей является k_z -компонента, то уравнение (31) перейдет в уравнение

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2} = 0, \quad (32)$$

по виду совпадающее с уравнением, описывающим известную бунемановскую неустойчивость безграничной плазмы с током [6, 10]. Из (32), предполагая выполненным неравенства $|\tilde{\omega}| \ll |k_y V_d|$, несложно получить следующие приближенные выражения для инкремента неустойчивости:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= i\omega_{Li} \frac{|k_y V_d|}{\sqrt{\omega_{Le}^2 - |k_y V_d|^2}}, \quad |k_y V_d| < \omega_{Le}, \\ \tilde{\omega} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \omega_{Li}^2 \omega_{Le} \right)^{1/3}, \quad |k_y V_d| = \omega_{Le}.\end{aligned}\quad (33)$$

Применительно к плазменному конденсатору с поперечным магнитным полем неустойчивость с инкрементами (33) уместно назвать дрейфово-бунемановской неустойчивостью, нерезонансной (первый инкремент (33)) и резонансной (второй инкремент (33)). Величину k_y в (33) можно оценить из того соображения, что длина волны возмущений в конденсаторе должна быть кратна размеру L_y обкладки конденсатора в этом направлении, например, $k_y \sim \pi/L_y$.

Во втором частном случае малых k_z уравнение (31) записывается в виде

$$1 - \frac{\omega_{Li}^2}{\tilde{\omega}^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{(\tilde{\omega} - k_y V_d)^2 - \Omega_e^2} = 0, \quad (34)$$

откуда для инкрементов получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} &= i\omega_{Li} \sqrt{\frac{|k_y V_d|^2 - \Omega_e^2}{\Omega_g^2 - |k_y V_d|^2}}, \quad \Omega_e < |k_y V_d| < \Omega_g, \\ \tilde{\omega} &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} \omega_{Li}^2 \omega_{Le} \frac{\omega_{Le}}{|k_y V_d|} \right)^{1/3}, \quad |k_y V_d| = \Omega_g.\end{aligned}\quad (35)$$

Неустойчивость с инкрементом (35) можно классифицировать как дрейфово-циклотронную неустойчивость — нерезонансную (первый инкремент (35)) и резонансную (второй инкремент (35)). Вероятно, что в случае конденсатора с ВЧ-полем, т.е. при $\omega \neq 0$, при учете движения ионов должны появиться еще какие-то неустойчивости, например параметрические, рассмотрению которых мы предполагаем посвятить отдельную работу.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке
Российского научного фонда (проект № 22-29-00642).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т. 3. С. 443. М.: Наука, 2000.
2. Shvydkiy G.V., Zadiriev I.I., Kralkina E.A., Vavilin K.V. // Vacuum. 2020. V. 180. P. 109588.
3. Александров А.Ф., Кузелев М.В. Теоретическая плазменная электротехника. М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2011.
4. Александров А.Ф., Кузелев М.В., Рухадзе А.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 7. С. 826.
5. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970.
6. Кузелев М.В. Введение в физику плазмы. М.: Ленанд, 2022.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. М.: Физматлит, 2004.
8. Савинов В.П. Физика высокочастотного емкостного разряда. М.: Физмалит, 2013.
9. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Ленанд, 2018.
10. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. шк., 1978.