РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 9, с. 893–896

К 70-ЛЕТИЮ ИРЭ ИМ. В.А. КОТЕЛЬНИКОВА РАН

УДК 53.04

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ОСОБУЮ ТОЧКУ В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДУФФИНГА

О. С. Темная[a], *, А. Р. Сафин[a, b], О. В. Кравченко[a, c], С. А. Никитов[a, d, e]

[a] *Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

[b] *Национальный исследовательский университет "МЭИ", ул. Красноказарменная, 14, стр. 1, Москва, 111250 Российская Федерация*

[c] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, ул. Вавилова, 40, Москва, 119333 Российская Федерация*

[d] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Институтский пер., 9, Долгопрудный Московской области, 141700 Российская Федерация*

[e] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012 Российская Федерация*

**E-mail: ostemnaya@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.
После доработки 15.06.2023 г.
Принята к публикации 25.06.2023 г.

Исследовано влияние нелинейности на смещение особой точки в системе двух связанных осцилляторов Дуффинга при изменении коэффициентов связи и вносимых потерь. Показано, что смещение особой точки при изменении коэффициента нелинейности сопровождается уменьшением амплитуды возбуждаемых колебаний и сдвигом резонансной частоты. Численно найдены пороговые значения коэффициентов нелинейности, связи и вносимых потерь, при которых возникает особая точка. Показано, что увеличение коэффициента нелинейности приводит к уменьшению порогового значения вносимых потерь, необходимых для образования особой точки.

DOI: 10.31857/S0033849423090231, **EDN:** SJESLH

ВВЕДЕНИЕ

Особыми точками (ОТ) называют такие точки пространства параметров, в которых собственные векторы и собственные значения совпадают [1]. Такое вырождение характерно для неэрмитовых квантовых систем с симметрией "четность–время" (PT-симметрией). Вещественные спектры таких систем при переходе через особую точку становятся комплексными, что сопровождается спонтанным нарушением симметрии. В PT-симметричных системах добиться появления ОТ можно за счет изменения величины вносимых потерь и силы связи между частями системы [2]. В ОТ могут возникать различные интересные с практической точки зрения эффекты, такие как резкое увеличение чувствительности, увеличенный диапазон генерации частот, лучшее шумоподавление [2, 3]. Таким образом, важной задачей является поиск условий возникновения ОТ и способов управления их положением в пространстве параметров системы.

Особые точки были обнаружены в различных физических средах и системах, включая оптику [2, 4, 5], акустику [6, 7], электронику [3], магнонику и спинтронику [8–11]. В большинстве приведенных выше примеров для наблюдения ОТ используются не квантовые, а классические системы, а именно колебательные и волновые. С точки зрения теории колебаний и волн две нормальные моды двух взаимосвязанных систем за счет вносимых положительных и отрицательных потерь вырождаются в одну собственную в ОТ. Для этого системы должны быть идентичными, вносимые потери в одной из них положительными (затухание усиливается), а в другой отрицательными (затухание компенсируется). При таком внесении потерь резонансные свойства колебательных систем в ОТ не ухудшаются и определяются собственным затуханием. Величина же вносимых потерь, необходимая для появления ОТ, прямо пропорционально зависит от величины связи между системами. В большинстве работ, посвященных ОТ в колебательных системах, анализ проводится в линейном случае, тогда как нелинейность пред-

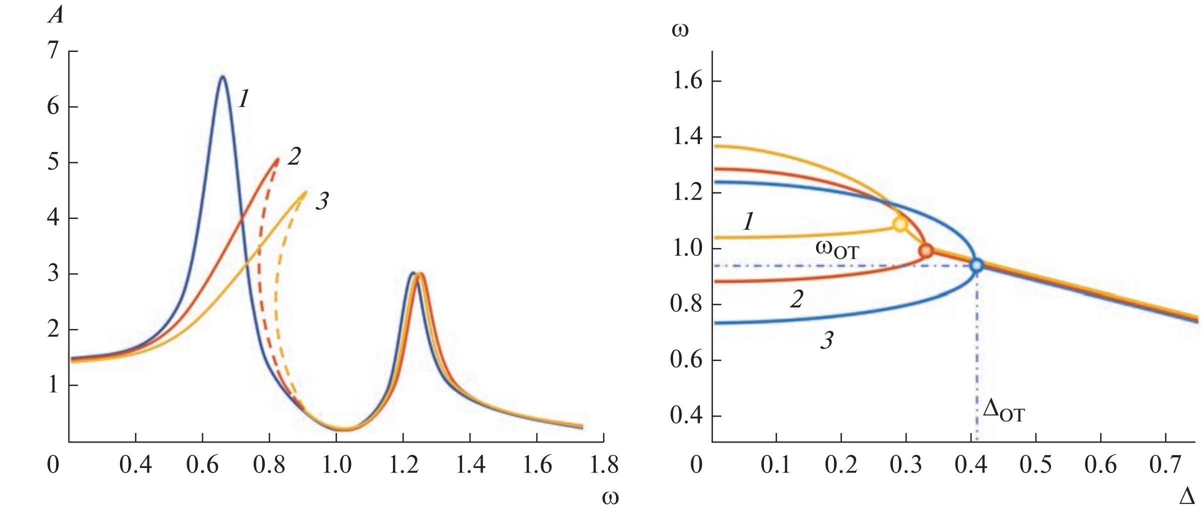

Рис. 1. Семейство амплитудно-частотных характеристик двух связанных осцилляторов Дуффинга (а) и зависимости действительных частей нормальных частот от величины вносимых потерь (б) для трех значений коэффициента нелинейности: β = 0 (*1*), 1 (*2*) и 3 (*3*); штрихпунктирной линией обозначены неустойчивые области резонансной кривой.

полагается малой (см., например, [3, 8]). Вместе с тем существенная нелинейность может быть дополнительной степенью свободы для возможности управления положением особой точки.

Цель данной работы – исследовать влияние консервативной кубической нелинейности на ОТ в системе связанных осцилляторов Дуффинга. Выбор данного типа осцилляторов обусловлен их широким применением для описания различных нелинейных колебательных систем – от электрических генераторов до спинтронных наноосцилляторов [12–14].

1. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим систему неавтономных дифференциальных уравнений относительно координат $x(t)$, $y(t)$ двух взаимосвязанных нелинейных осцилляторов с коэффициентом связи μ и коэффициентом нелинейности β следующего вида:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (\Delta_0 - \Delta)\,\dot{x} + \omega_0^2\left(1 + \beta x^2\right)x + \mu y = f\sin\omega t, \\ \ddot{y} + (\Delta_0 + \Delta)\,\dot{y} + \omega_0^2\left(1 + \beta y^2\right)y + \mu x = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где Δ_0, Δ – коэффициенты собственного и вносимого затухания осцилляторов, соответственно, β – коэффициент нелинейности, μ – коэффициент связи между осцилляторами, ω_0 – собственная частота каждого осциллятора, f, ω – амплитуда и частота внешнего воздействия. Как видно по знакам коэффициентов вносимых потерь Δ в (1), в первом осцилляторе собственные потери компенсируются вносимыми потерями, а во втором потери усиливаются. Внешнее гармоническое воздействие действует на первый осциллятор, во втором же колебания возникают как вынужденные колебания за счет связи с первым.

Проведем численное интегрирование системы уравнений (1) стандартными методами анализа дифференциальных уравнений (метод Рунге–Кутты четвертого порядка) при следующих параметрах: $\omega_0 = 1$, $\Delta_0 = 0.1$, $f = 0.1$, $\mu = 0.7$, $\Delta, \beta, \omega = \mathrm{var}$. При $\beta = 0$ в системе двух связанных осцилляторов наблюдаются две нормальные частоты $\omega_{1,2}$ на амплитудно-частотной характеристике (рис. 1а), которые при увеличении коэффициента нелинейности $\beta > 0$ также увеличиваются (при $\Delta = 0$), причем помимо смещения нормальных частот при некотором значении β возникает гистерезисный эффект с образованием неустойчивых ветвей [12, 13]. При этом для фиксированной частоты внешнего воздействия амплитуда нижней моды системы уменьшается при увеличении частоты вынужденных колебаний.

Расстояние между резонансными пиками (рис. 1а) напрямую зависит от константы связи между осцилляторами. Как было сказано выше, ОТ возникает из-за вырождения нормальных частот $\omega_{1,2}$ в собственную ω_0 за счет увеличения коэффициента вносимых потерь Δ. В линейной системе для любой величины константы связи μ существует единственное значение вносимых потерь Δ_{OT}, при котором возникает ОТ (рис. 1б). При этом имеется такое пороговое значение $\beta_п$ (для приведенных выше параметров $\beta_п \approx 0.79$), при котором смещение особой точки резко меняется, а при $\beta < \beta_п$ частота появления ОТ практически не меняется при увеличении Δ. Критическое значение Δ_{OT} также остается неизменным, однако при $\beta > \beta_п$ частота

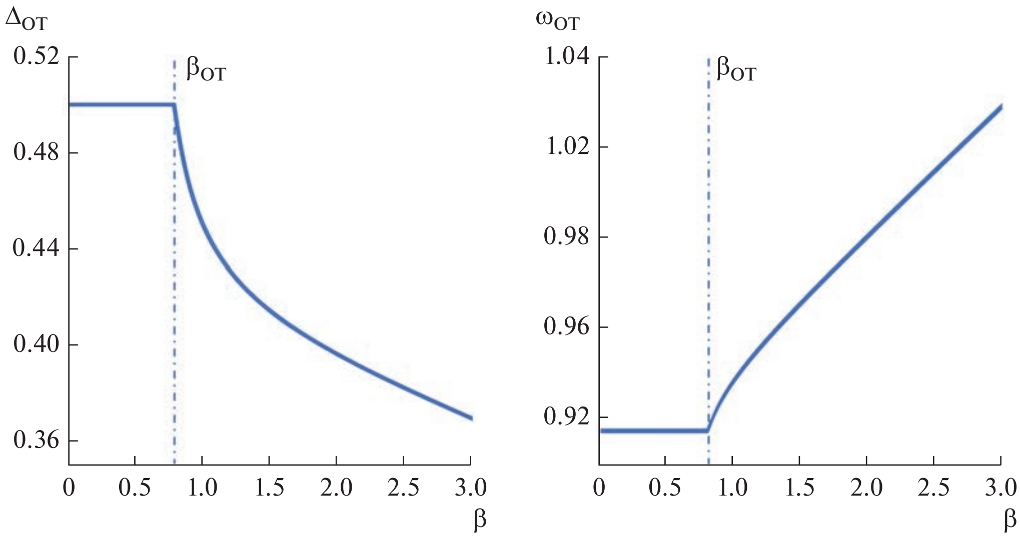

Рис. 2. Зависимости вносимых потерь $\Delta_{ОТ}$ (а) и частоты $\omega_{ОТ}$ (б), при которых образуется особая точка, от величины коэффициента нелинейности β; штрихпунктиром обозначена линия критического параметра нелинейности $\beta_п \approx 0.79$, при котором происходит смещение вносимых потерь и резонансной частоты.

ОТ $\omega_{ОТ}$ увеличивается, а $\Delta_{ОТ}$ уменьшается (см. рис. 1б). Таким образом, наличие кубической нелинейности приводит к появлению ОТ при меньших значениях вносимых потерь. Увеличение параметра нелинейности β приводит к резкому уменьшению $\Delta_{ОТ}$, при котором появляется ОТ (рис. 2а). При увеличении порогового значения параметра нелинейности резонансные частоты смещаются, вследствие чего требуется меньшее вносимое затухание (рис. 2б).

В заключение проведем численное моделирование влияния зависимости вносимых потерь Δ от константы связи μ и параметра нелинейности β, при которых появляется особая точка. В линейном случае при $\beta = 0$ зависимость ОТ от μ линейна, а именно $\mu = \Delta$. Как указывалось ранее, увеличение коэффициента нелинейности β приводит к появлению ОТ при меньших значениях Δ, что также проявляется при изменении параметра связи μ. При этом зависимость $\mu(\Delta)$ имеет следующий вид:

$$\mu(\Delta) = A(\beta)\Delta,$$

где $A > 1$ – крутизна этой зависимости (рис. 3). Следовательно, при большей связи между осцилляторами наличие нелинейности приводит к уменьшению вносимых потерь, при котором появляется ОТ.

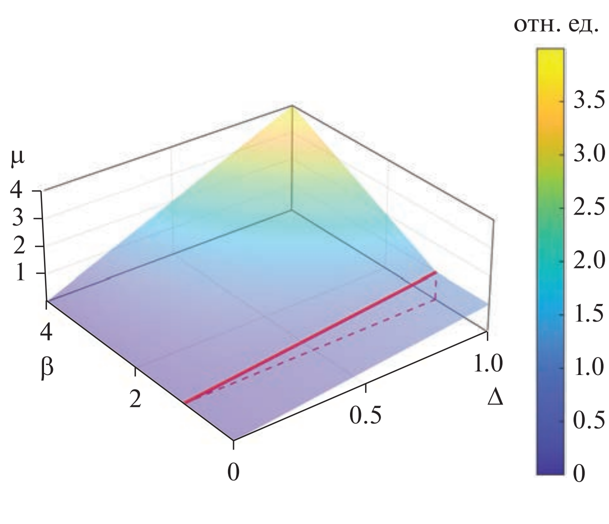

Рис. 3. Зависимость константы связи μ от величины вносимых потерь Δ и коэффициента нелинейности β, при которых наблюдается особая точка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, исследовано влияние нелинейности на положение особой точки на плоскости параметров в системе двух консервативно связанных осцилляторов Дуффинга при изменении коэффициентов связи и вносимых потерь. Показано, что смещение положения особой точки при изменении коэффициента нелинейности сопровождается уменьшением амплитуды возбуждаемых колебаний и сдвигом резонансной частоты. Численно найдены пороговые значения коэффициентов нелинейности, связи и вносимых потерь, при которых возникает особая точка (см. рис. 3). Показано, что увеличение коэффициента нелинейности приводит к уменьшению порогового значения вносимых потерь, необходимых для образования особой точки. Предлагаемый анализ может быть проведен для осцилляторов различной физической природы, разных типов связи между ними, а также большего числа осцилляторов с появлением особых точек высших порядков. Соответствующие задачи являются предметом отдельного детального исследования и в данной работе не рассматриваются.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00607П).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kato T.* A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators. N.Y.: Springer., 2011. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5700-4
2. *Wiersig J.* // Photon. Res. 2020. V. 8. № 9. P. 1457. https://doi.org/10.1364/PRJ.396115
3. *Weidong C., Wang C., Chen W. et al.* // Nat. Nanotech. 2022. V. 17. Article No. 262268. https://doi.org/10.1038/s41565-021-01038-4
4. *Зябловский А.А., Виноградов А.П., Пухов А.А. и др.* // Успехи физ. наук. 2014. Т. 184. № 11. С. 1177. https://doi.org/10.3367/UFNr.0184.201411b.1177
5. *Rüter C., Makris K., El-Ganainy R.* // Nat. Phys. 2010. V. 6. Article No. 192195. https://doi.org/10.1038/nphys1515
6. *Вилков Е.А., Бышевский-Конопко О.А., Темная О.С. и др.* // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48. № 24. С. 38. https://doi.org/10.21883/PJTF.2022.24.54023.19291
7. *Zhu X., Ramezani H., Shi C. et al.* // Phys. Rev. X 2014. V. 4. Article No. 031042. https://doi.org/10.1103/PhysRevX.4.031042
8. *Wittrock S., Perna S., Lebrun R. et al.* // arXiv: 2108.04804.
9. *Liu H., Sun D., Zhang C. et al.* // Sci. Adv. 2019. V. 5. № 11. Article No. aax9144. https://doi.org/10.1126/sciadv.aax9144
10. *Temnaya O.S., Safin A.R., Kalyabin D.V., Nikitov S.A.* // Phys. Rev. Appl. 2022. V. 18. Article No. 014003. https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.18.014003
11. *Sadovnikov A.V., Zyablovsky A.A., Dorofeenko A.V., Nikitov S.A.* // Phys. Rev. Appl. 2022. V. 18. Article No. 024073. https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.18.024073
12. *Rajasekar S., Sanjuan M.* Nonlinear Resonances. Cham: Springer, 2015.
13. *Рабинович И.М., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. Ижевск: НИЦ РХД, 2000.
14. *Moon K.-W., Chun B.S., Kim W. et al.* // Sci. Reports. 2014. V. 4. Article No. 6170.