

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА ЧАСТОТНО-ЭФФЕКТИВНЫХ СИГНАЛОВ С КОРРЕКТИРУЮЩИМ КОДИРОВАНИЕМ В НЕДВОИЧНЫХ ПОЛЯХ ГАЛУА

© 2023 г. Л. Е. Назаров*

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация*

**E-mail: levnaz2018@mail.ru*

Поступила в редакцию 26.04.2023 г.

После доработки 26.04.2023 г.

Принята к публикации 23.05.2023 г.

Дано описание алгоритма оптимального посимвольного приема сигнальных конструкций на основе блоковых помехоустойчивых кодов в недвоичных полях Галуа. Показано, что основу данного алгоритма составляет алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша–Адамара с размерностью поля Галуа. Показано, что результирующая сложность анализируемого алгоритма посимвольного приема определяется размерностью дуального кода, что обуславливает перспективность его применения для блоковых помехоустойчивых кодов с высокой кодовой скоростью (с низкой избыточностью). Приведены результаты моделирования алгоритма посимвольного приема с целью исследования помехоустойчивости для ряда частотно-эффективных цифровых сигналов с квадратурно-амплитудной и амплитудно-фазовой манипуляциями (с коэффициентом частотной эффективности 3, 4 и 6 бит/с/Гц) в сочетании с корректирующим кодом с проверкой на четность. Показано, что применение алгоритма посимвольного приема обеспечивает энергетический выигрыш до 1.5...3.0 дБ по отношению к передаче и приему рассматриваемого ряда сигналов без кодирования.

DOI: 10.31857/S003384942309019X, EDN: RHJWQA

ВВЕДЕНИЕ

Достижение требуемой информационной скорости передачи при разработке систем связи при ограниченной частотной полосе радиоканала обеспечиваются с помощью цифровых сигналов при увеличении их частотной эффективности m (бит/с/Гц) [1–4]. В этот класс входят цифровые сигналы с двумерными “созвездиями” и с различными видами манипуляции (фазовой, амплитудной и др.), интенсивно используемые в приложениях [1, 5, 6].

Вместе с тем увеличение значений m цифровых сигналов при постоянной мощности передающих устройств приводит к деградации помехоустойчивости (например, вероятности ошибки на бит P_b) [1]. В этом случае повышение надежности передачи по каналам с помехами возможно обеспечить путем применения сигнальных конструкций на основе цифровых частотно-эффективных сигналов в сочетании с корректирующим кодированием [7, 8].

Известны два метода оптимального приема этих сигнальных конструкций: посимвольный

прием, минимизирующий вероятность ошибки P_b , и метод максимального правдоподобия, минимизирующий вероятность ошибки на дискретное сообщение [1, 9, 10].

Теория посимвольного приема сигнальных конструкций представляет самостоятельное научное направление [1]. Алгоритмы посимвольного приема для сигнальных конструкций на основе ряда корректирующих кодов (турбо-кодов, низкоплотностных кодов и др.) обеспечивают достижение вероятностных характеристик, близких к предельным характеристикам и определяемых пропускной способностью каналов с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) [4, 5, 11–13].

Актуальной является проблема разработки, обобщения и исследования алгоритмов посимвольного приема частотно-эффективных цифровых сигналов в сочетании с корректирующими кодами в недвоичных полях Галуа $GF(2^m)$, объем которых равен объему сигнальных “созвездий”

$M = 2^m$ [8, 11]. Этот подход позволяет расширить класс сигнальных конструкций, перспективных

для использования в информационных системах, что согласуется с современным направлением развития теории посимвольного приема и теории помехоустойчивых кодов в не двоичных полях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\vec{A} = (a_i; 0 \leq i \leq k-1)$ — последовательность k информационных символов как элементов поля Галуа $GF(2^m)$, формируемого по модулю неприводимого примитивного многочлена $\gamma(x)$ степени m [7]. Элементы поля a_i (информационные символы) представляются многочленами:

$$a_i = \sum_{p=0}^{m-1} \alpha_p(a_i) x^p,$$

где $\alpha_p(a_i) \in GF(2)$ [7].

Кодовое слово $\vec{B}$ корректирующего кода в поле $GF(2^m)$, соответствующее $\vec{A}$, задается как $\vec{B} = \vec{A} \cdot H$ [7, 11]. Здесь H — порождающая матрица корректирующего кода в систематическом виде с элементами поля $GF(2^m)$, ее размерность равна $n \times k$ (n — длина кодовых слов).

Кодовые символы b_i ($0 \leq i \leq n-1$, $a_i = b_i$ для $0 \leq i \leq k-1$) кодового слова $\vec{B}$ сопоставляются цифровым сигналам с “созвездием” объемом 2^m , которые передаются по радиоканалам.

На вход решающего устройства с выхода сигнального демодулятора поступает дискретная реализация $\vec{Y} = (\dot{y}_i; 0 \leq i \leq n-1)$, $\dot{y}_i$ — “мягкие” (многоуровневые) комплексные отсчеты. Оптимальное посимвольное правило приема заключается в вычислении апостериорных вероятностей $\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})$, $\beta \in GF(2^m)$, на основе которых принимаются решения относительно переданных символов $\hat{a}_i$ и коэффициентов $\hat{\alpha}_p(a_i)$ с использованием правила [9, 8]:

$$\hat{a}_i = \max_{\beta \in GF(2^m)} (\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})). \quad (1)$$

В работах [10, 15] приведено описание разработанной процедуры вычисления апостериорных вероятностей $\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})$. Основу этой процедуры составляет алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша–Адамара с размерностью 2^m и функциональное преобразование вычисленных спектральных составляющих в пространстве над $GF(2^m)$ с размерностью дуального кода $n-k$ для оценивания значений $\hat{a}_i$. Приведены также результаты исследований помехоустойчивости этого алгоритма для класса цифровых

сигналов с многоуровневой фазовой манипуляцией [12].

Цель работы — исследование помехоустойчивости рассматриваемого алгоритма оптимального посимвольного приема для цифровых сигналов с квадратурно-амплитудной (КАМ-М) и амплитудно-фазовой (АФМ-М) манипуляциями с повышением их частотной эффективности, интенсивно используемых в информационных системах различного назначения.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПОСИМВОЛЬНОГО ПРИЕМА ЧАСТОТНО-ЭФФЕКТИВНЫХ СИГНАЛОВ

Одной из важных характеристик рассматриваемых КАМ-М и АФМ-М сигналов $s(t)$ является коэффициент частотной эффективности $m = \log_2 M$ (бит/с/Гц), задающий максимальную информационную скорость $R = m\Delta F$ (бит/с) для канала с частотной полосой ΔF (Гц) [1, 2].

Рассматриваемые цифровые сигналы $s(t)$ задаются соотношением [1]

$$s(t) = \sum_i A_i U(t) \cos(2\pi f t + \varphi_i). \quad (2)$$

Здесь f — центральная частота; $U(t) = 1$ при $iT \leq t < (i+1)T$ и $U(t) = 0$ в противном случае; A_i , φ_i — амплитуда и фаза радиоимпульсов в составе $s(t)$, дискретные значения которых задают тип “созвездия”; T — тактовые временные интервалы.

Данные сигналы формируются путем отображения m двоичных информационных символов в символы “созвездия”, как правило, с использованием кода Грея для повышения надежности передачи информации — соседние символы “созвездия” отличаются лишь в одном из информационных битов задающих последовательностей [2].

Пример “созвездия” для АФМ-16 сигналов ($m = 4$ бит/с/Гц) представлен на рис. 1 — приведены законы отображения четырех информационных битов $\alpha_p(b_i)$ ($p = 0, 1, 2, 3$) в символы “созвездия” (в комплексные огибающие $\dot{V}_i = A_i \exp(j\varphi_i)$) [5].

Класс сигналов КАМ-М ($M = 2, 4, 6, 8$), определяемых протоколом 3GPP, задаются аналитическими соотношениями [6]. Примером являются сигналы АФМ-16 ($m = 4$ бит/с/Гц), комплексные огибающие которых задаются последовательно четырьмя двоичными битами $\alpha_p(b_i)$ ($p = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & [(1 - 2\alpha_0(i))[2 - (1 - 2\alpha_2(i))]] + \\ & + j[(1 - 2\alpha_1(i))[2 - (1 - 2\alpha_3(i))]]. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведен класс анализируемых в статье КАМ-М и АФМ-М сигналов в составе протоколов спутниковых информационных систем

DVB-S2, 3GPP [1, 5, 6] и используемых в системах спутниковой связи (ССС) [1, 2].

Апостериорные вероятности $\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})$ кодовых информационных символов рассматриваемых сигнальных конструкций вычисляются с использованием выражения [10]

$$\Pr(a_i = \beta | \vec{Y}) = \sum_{\vec{B}: a_i = \beta} \Pr(\vec{B} | \vec{Y}) = \sum_{\vec{B}: a_i = \beta} \frac{\Pr(\vec{B})}{p(\vec{Y})} p(\vec{Y} | \vec{B}). \quad (3)$$

Здесь $\Pr(\vec{B} | \vec{Y})$ – условная вероятность передачи кодового слова $\vec{B}$ для реализации $\vec{Y}$; $p(\vec{Y} | \vec{B})$ – функция правдоподобия, определяемая для модели канала без памяти соотношением

$$p(\vec{Y} | \vec{B}) = \prod_{i=0}^{n-1} p(y_i | b_i).$$

Априорные вероятности полагаются равными $\Pr(\vec{B}) = 2^{-mk}$.

Сложность вычисления $\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})$ с использованием соотношения (3), определяется требуемым объемом вычислительных операций и оценивается как $P_1 \approx 2^{mk}$, что даже для малых значений m, k представляет трудоемкую задачу. В работах [9, 10] приведено описание разработанного алгоритма вычисления $\Pr(a_i = \beta | \vec{Y})$ с существенно более низкой сложностью. Приведем общее описание этого алгоритма, чтобы пояснить особенности его применения для рассматриваемого класса частотно-эффективных сигналов.

Алгоритм состоит из трех этапов вычислений [10].

На *первом* этапе вычисляется множество спектральных составляющих $C_l(r)$ с размерностью 2^m для последовательностей $p(\dot{y}_l | \dot{V}_l)$, $i = 0, 1, \dots, 2^m - 1$:

$$C_l(r) = \sum_{i=0 \dots 2^m - 1} p(\dot{y}_l | \dot{V}_l) w_i(r), \quad r \in GF(2^m), \quad (4)$$

где $l = 0, 1, \dots, n - 1$ – номер позиции кодовых символов; $w_i(r)$ – базисные функции Уолша–Адамара с перемежением номеров i (закон перемежения может задаваться аналитически для определенного вида примитивного неприводимого многочлена

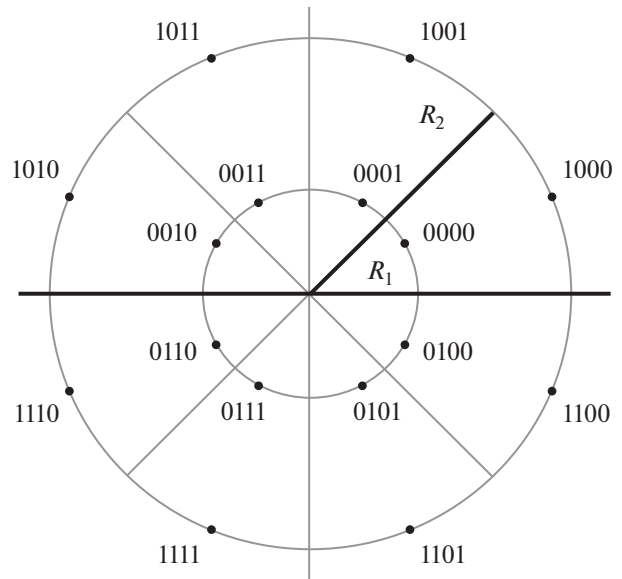


Рис. 1. Сигнальное “созвездие” АФМ-16 сигналов.

$\gamma(x)$ либо в виде таблицы, получаемой путем предварительной предобработки с целью установления правила перемежения [10]).

Нормированные отсчеты $\dot{y}_i$ для квадратурных составляющих $\text{Re}(\dot{y}_i)$, $\text{Im}(\dot{y}_i)$ и канала АБГШ со спектральной плотностью N_0 представляют случайные величины с средними

$$\sqrt{\frac{2mE_i}{N_0}} \cos(\varphi_i), \quad \sqrt{\frac{2mE_i}{N_0}} \sin(\varphi_i)$$

и с единичной дисперсией. Здесь E_i ($i = 0, 1, \dots, M - 1$) – энергии сигнальных символов “созвездия” с огибающей $\dot{V}_i$, удовлетворяющие условию

$$E_6 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E_i,$$

E_6 – энергия на 1 бит. С учетом этого условные плотности вероятности $p(\dot{y}_l | \dot{V}_l)$ в (4) определяются выражением [8]

$$p(\dot{y}_l | \dot{V}_l) = K \exp\left(-\|\dot{y}_l - \dot{V}_l\|^2 / 2\right), \quad (5)$$

Таблица 1. Значения E_6/N_0 , требуемые для достижения $P_6 = 10^{-5}$

Параметр	АФМ-8 DVB-S2	АФМ-16 DVB-S2	АФМ-16 3GPP	КАМ-16 ССС	АФМ-64 DVB-S2	АФМ-64 3GPP	КАМ-64 ССС
$E_6^{(1)}/N_0$, дБ	17.5	15.0	15.0	16.0	19.5	17.5	18.5
$E_6^{(2)}/N_0$, дБ	16.0	13.5	12.0	14.0	17.0	15.5	15.75
ΔE , дБ	1.5	1.5	3.0	2.0	2.5	2.0	2.75

Примечание: $E_6^{(1)}/N_0$ – без кода; $E_6^{(2)}/N_0$ – с кодированием, ΔE – энергетический выигрыш.

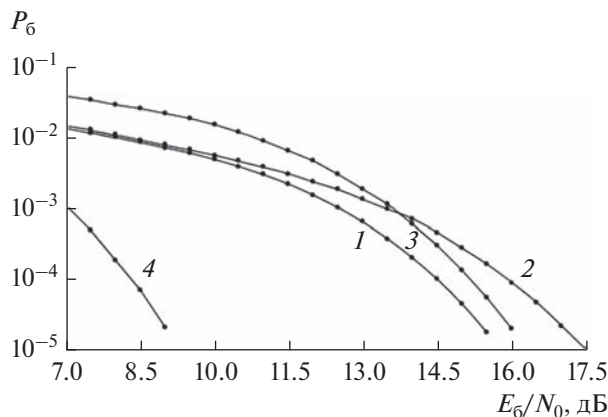


Рис. 2. Вероятности ошибки при приеме сигналов АФМ-8 (DVB-S2): 1 – с использованием корректирующего кода; 2 – без кодирования; 3 – для α_1 и α_2 элементов “созвездия”; 4 – для α_0 элементов “созвездия”.

$\|x\|$ – Евклидова метрика; K – постоянная нормировки.

На *втором* этапе вычисляется спектральное множество: $\{T_i(\lambda)\}$

$$T_i(\lambda) = \sum_{\beta=0 \dots 2^m-1} \Pr(b_i = \beta | \vec{Y}) w_{\beta}(\lambda), \quad \lambda \in GF(2^m). \quad (6)$$

Производительная процедура вычисления $\{T_i(\lambda)\}$ (6) основана на использовании величин $C_i(r)$ и множества кодовых слов R кода C_H с параметрами $(n, n-k)$ дуального к используемому корректирующему коду [10]:

$$T_i(\lambda) = \frac{\sum_{r_p: R \in C_H} C_i(r_i - \lambda) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{n-1} C_p(r_p)}{\sum_{r_p: R \in C_H} \prod_{p=0}^{n-1} C_p(r_p)}. \quad (7)$$

Обозначение $r_p: R \in C_H$ в (7) определяет арифметические операции для последовательности кодовых символов r_p в составе кодового слова R кода C_H .

На *третьем* этапе вычисляются апостериорные вероятности $\Pr(b_i = \beta | \vec{Y})$ путем обратного спектрального преобразования в базисе Уолша–Адамара размерностью 2^m над множеством $\{T_i(\lambda)\}$:

$$\Pr(b_i = \beta | \vec{Y}) = \sum_{\lambda=0 \dots 2^m-1} T_i(\lambda) w_{\beta}(\lambda). \quad (8)$$

Решение относительно переданного символа b_i и информационных символов $\alpha_p(b_i)$, $p = 0, 1, \dots, m-1$ принимается в соответствии с правилом (1).

Сложность вычисления соотношения (3) оценивается приведенным выше значением P_1 , сложность вычисления (4), (7), (8) оценивается как $P_2 \cong 2^{m(n-k)}$, для значений $n-k \ll k$ справедливо условие $P_2 \ll P_1$.

Наиболее простым является рассматриваемый алгоритм посимвольного приема для сигнальных конструкций на основе кодов с проверкой на четность. В этом случае множество кодовых слов R дуального кода C_H с параметрами $(k+1, 1)$ содержит 2^m последовательностей кодовых символов одинаковых элементов $\alpha \in GF(2^m)$ длиной $k+1$ [7, 8, 14–18].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании алгоритма оптимального посимвольного приема задавалась передаваемая по каналу АБГШ случайная информационная последовательность объемом ≈ 100 битов [19], значения k равны соответственно 33, 25 и 16 для рассматриваемых сигнальных “созвездий” объемом $2^3, 2^4$ и 2^6 .

В табл. 1 приведены результаты моделирования, полученные для рассматриваемого ряда частотно-эффективных сигналов АФМ-8, АФМ-16, КАМ-16, АФМ-64 и КАМ-64 [1, 5, 6]. Приведены параметры: средние значения сигнал/помеха E_6/N_0 , требуемые для достижения вероятности ошибки $P_6 = 10^{-5}$ без корректирующего кодирования и с кодированием с проверкой на четность в полях Галуа $GF(2^m)$ ($m = 3, 4, 6$) и соответствующие значения энергетических выигрышей ΔE .

На рис. 2 и 3 представлены усредненные вероятностные кривые для сигнальных конструкций на основе “созвездия” АФМ-8 (DVB-S2, см. рис. 1), “созвездий” АФМ-16 и КАМ-16. Кривые 1 соответствуют использованию рассматриваемого корректирующего кода, кривые 2 – без кодирования. Подобные вероятностные кривые получены также и для сигнальных конструкций на основе “созвездий” АФМ-64 и КАМ-64.

Из табл. 1 и рис. 2, 3 следует, что энергетические выигрыши ΔE зависят от типа и объемов 2^m сигнальных “созвездий” – для $P_6 = 10^{-5}$ значения ΔE при использовании рассматриваемой простой схемы кодирования достигают значимых величин 1.5...3.0 дБ.

Моделирование алгоритма оптимального посимвольного приема рассматриваемых сигнальных конструкций показало зависимость вероятностей ошибки P_6 от положения (номера) информационных битов в составе сигнального “созвездия”. Дан-

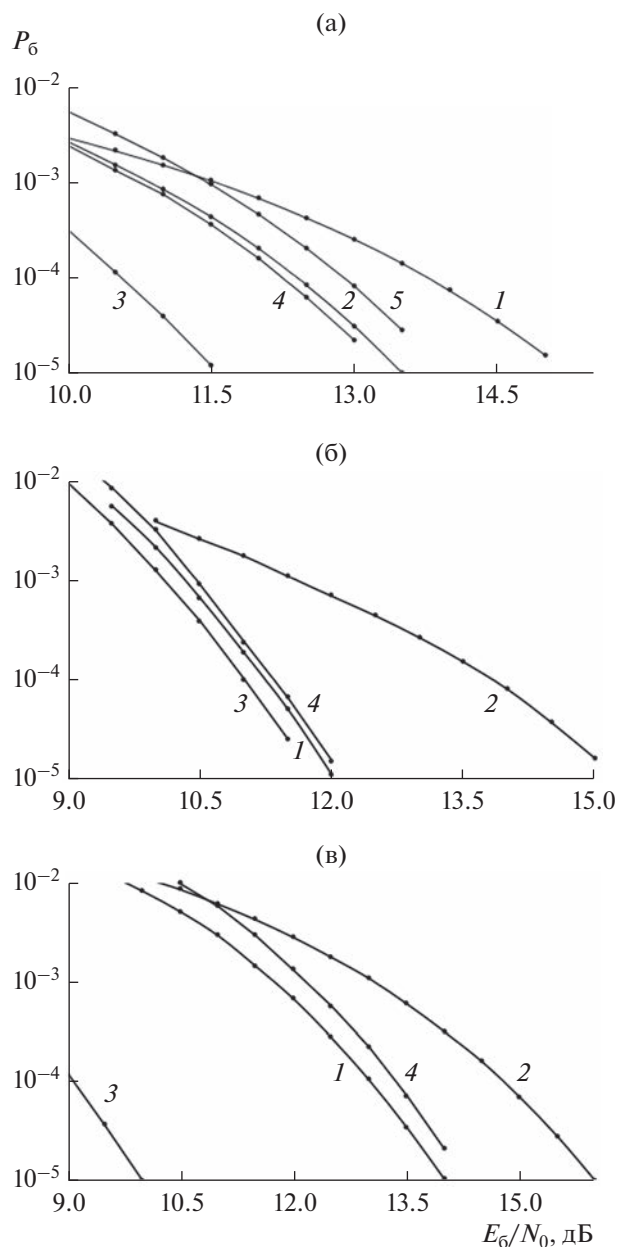


Рис. 3. Вероятности ошибки при приеме сигналов АФМ-16: 1 – с использованием корректирующего кода; 2 – без кодирования; а) DVB-S2: 3 – для α_0 , 4 – для α_1 и α_2 , 5 – для α_3 элементов “созвездия”; б) 3GPP: 3 – для α_0 и α_1 , 4 – для α_2 и α_3 элементов “созвездия”; в) KAM-16: 3 – для α_0 и α_2 , 4 – для α_1 и α_3 элементов “созвездия”.

ное свойство является полезным для усиления помехоустойчивости старших значимых передаваемых битов, например, при передаче телеметрической информации [20].

На рис. 2 кривая 3 соответствует зависимости вероятности ошибки P_6 от E_6/N_0 для значений α_1

и α_2 в представлении элементов “созвездия” АФМ-8 сигналов, кривая 4 – для α_0 . Видно, что для $P_6 = 10^{-5}$ отличия вероятностных характеристик достигают значения 6.75 дБ.

На рис. 3а кривая 3 соответствует вычисленной вероятностной характеристике для α_0 в представлении элементов “созвездия” АФМ-16 сигналов DVB-S2, кривая 4 – для α_1 и α_2 , кривая 5 – для α_3 . В этом случае отличия вероятностных характеристик по отношению к кривой 3 достигают 1.75 и 2.25 дБ соответственно.

На рис. 3б кривая 3 соответствует вероятностной характеристике для α_0 и α_1 в представлении элементов “созвездия” АФМ-16 сигналов 3GPP, кривая 4 – для α_2 и α_3 ; отличия вероятностных характеристик по отношению к кривой 3 достигают 0.25 дБ.

На рис. 3в кривая 3 соответствует вероятностной характеристике для α_0 и α_2 в представлении элементов “созвездия” КАМ-16 сигналов, кривая 4 – для α_1 и α_3 ; отличия характеристик по отношению к кривой 3 достигают 4.0 дБ.

Подобные вероятностные кривые вычислены также и для сигнальных “созвездий” АФМ-64 (DVB-S2), АФМ-64 (3GPP) и КАМ-64 (ССС). В табл. 2 приведены вычисленные значения E_6/N_0 , требуемые для достижения вероятности ошибки $P_6 = 10^{-5}$ для информационных двоичных символов α_p ($p = 0, 1, \dots, m$) в зависимости от их расположения в составе “созвездий”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано описание алгоритма оптимального посимвольного приема сигнальных конструкций на основе сигнальных “созвездий” частотно-эффективных цифровых сигналов с квадратурно-амплитудной и амплитудно-фазовой манипуляциями и блоковых помехоустойчивых кодов в не двоичных полях Галуа $GF(2^m)$. Правило посимвольного приема минимизирует вероятность ошибки на информационный бит в отличие от известного правила максимального правдоподобия, минимизирующего вероятность ошибки на дискретное сообщение.

Основу анализируемого алгоритма оптимального посимвольного приема составляет алгоритм быстрого спектрального преобразования в базисе Уолша–Адамара с размерностью поля Галуа 2^m . Результирующая сложность алгоритма посимвольного приема определяется размерностью дуального кода, что обуславливает перспективность его применения для блоковых помехоустойчивых кодов с высокой кодовой скоростью.

Таблица 2. Значения E_b/N_0 , требуемые для достижения $P_0 = 10^{-5}$ для информационных битов 0...5 сигнальных “созвездий”

Сигналы	0	1	2	3	4	5
АФМ-8 DVB-S2	16.0	9.25	9.25	—	—	—
АФМ-16 DVB-S2	11.5	13.25	13.25	13.75	—	—
АФМ-16 3GPP	11.75	11.75	12.0	12.0	—	—
КАМ-16	10.0	14.0	10.0	14.0	—	—
АФМ-64 DVB-S2	17.0	16.5	17.0	17.0	16.75	16.5
АФМ-64 3GPP	16.0	14.75	15.5	15.25	15.5	15.5
КАМ-64	15.75	15.5	15.75	15.25	15.25	15.0

Исследование вероятностных характеристик рассматриваемого алгоритма посимвольного приема произведено путем его моделирования для сигнальных конструкций на основе интенсивно используемых в приложениях частотно-эффективных цифровых сигналов с коэффициентом частотной эффективности 3...6 бит/с/Гц в полях Галла $GF(2^3)$, $GF(2^4)$, $GF(2^6)$ и для кодов с проверкой на четность с добавлением лишь одного проверочного символа. Показано, что применение алгоритма посимвольного приема обеспечивает энергетический выигрыш до 1.5...3.0 дБ по отношению к передаче и приему рассматриваемого ряда сигналов без кодирования.

Показана также зависимость вероятностей ошибки P_0 от положения информационных битов в составе сигнального “созвездия”, что является полезным свойством для усиления помехоустойчивости старших значимых битов при передаче телеметрической информации.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН № 075-01110-23-01.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proakis J.G., Salehi M. Digital Communication. 5th ed. N.Y.: McGraw-Hill, Huger Education, 2001.
2. Склад Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: ИД “Вильямс”, 2003.
3. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи. Базовые методы и характеристики. М.: Эко-Трендз, 2005.
4. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Панкратов Д.Ю. Технологии в системах радиосвязи на пути к 5G. М.: Горячая линия—Телеком, 2018.
5. Second Generation Framing Structure, Channel Coding and Modulation Systems for Broadcasting, Interac-

tive Services, News Gathering and Other Broadband Satellite Applications. Part 2: DVB-S2 Extensions (DVB-S2X) DVB. Document A083-2. European Broadcasting Union CH-1218, Geneva, 2020. Режим доступа: https://dvb.org/wp-content/uploads/2019/10/A083-2_DVB-S2X_Draft-EN-302-307-2-v121_Feb_2020.pdf.

6. ATIS 3GPP SPECIFICATION, 3GPP TS 38.211 V16.2.0 (2020-06): 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Radio Access Network; NR; Physical channels and modulation (Release 16). Published by Alliance for Telecommunications Industry Solutions, Washington, 2020.
7. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
8. Назаров Л.Е., Батанов В.В. // РЭ. 2022. Т. 67. № 8. С. 782. <https://doi.org/10.31857/S0033849422080137>
9. Bahl L.R., Cocke J., Jelinek F., Raviv J. // IEEE Trans. 1974. V. IT-20. № 3. P. 284.
10. Смольянинов В.М., Назаров Л.Е. // РЭ. 1999. Т. 44. № 7. С. 838.
11. Johnson S.J. Iterative Error Correction: Turbo, Low-Density Parity-Check and Repeat-Accumulate Codes. Cambridge: Univ. Press, 2010.
12. Назаров Л.Е., Головкин И.В. // РЭ. 2010. № 10. С. 1193.
13. Терешонок М.В., Кленов Н.В., Лобов Е.М. и др. // РЭ. 2022. Т. 67. № 3. С. 294. <https://doi.org/10.31857/S0033849422030160>
14. Ping Li, Chan S., Yeng K.L. // Electronic Lett. 1997. V. 33. № 19. P. 1614.
15. Steiner F., Bocherer G., Liva G. // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 2210.
16. Lin S.-J. // IEEE Trans. 2018. V. COM-66. № 8. P. 3235.
17. Назаров Л.Е., Шишкин П.В. // РЭ. 2019. № 9. С. 910.
18. Kaipa K. // IEEE Commun. Lett. 2018. V. 22. № 11. P. 210.
19. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
20. Назаров Л.Е. // РЭ. 1999. Т. 44. № 10. С. 1231.