

ГЕОМЕТРИЗОВАННЫЕ МОДЕЛИ
ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2023 г. В. А. Сыровой*

ВЭИ – филиал ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. акад. Е.И. Забабахина»,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 10.12.2021 г.

После доработки 10.12.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2022 г.

Во втором приближении в системе координат x^i , $i = 1, 2, 3$, связанной с трубками тока $x^2 = \text{const}$, сформулированы уравнения осесимметричных и плоскосимметричных электростатических потоков в трех вариантах геометризованной теории: в l -представлении, продольная координата x^1 не связана с физическими параметрами пучка, в φ - и W -представлениях, когда в качестве x^1 используется потенциал электростатического поля $x^1 = \varphi$ или потенциал обобщенного импульса $x^1 = W$.

DOI: 10.31857/S0033849423050157, EDN: UIKKDZ

ВВЕДЕНИЕ

Геометризованная теория [1, 2] основана на новой форме уравнений пучка, записанных в заранее неизвестной системе координат x^i , $i = 1, 2, 3$, которая связана с траекториями (линии x^1) или трубками тока (поверхности $x^2 = \text{const}$). Условия эвклидовости пространства (шесть тождеств Ляме – нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка относительно элементов метрического тензора g_{ik}) дополняют уравнения для физических параметров потока.

Система x^i в общем случае неортогональна. Для двумерных пучков при неспециализированной продольной координате x^1 выполнение условий термоэмиссии обеспечивается локальной неортогональностью системы вблизи сингулярной стартовой поверхности. Уравнения, описывающие двумерные потоки, удалось представить как соотношение на трубке тока вместе с системой эволюционных уравнений. Первое имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по координате x^1 , в которое поперечная координата x^2 входит как параметр. Эволюционные уравнения выражают первые производные по x^2 от геометрических и физических характеристик потока через данные, известные на базовой

трубке тока. В отличие от параксиального приближения эти соотношения являются точными.

Упомянутая декомпозиция исходной системы позволяет построить первое приближение теории, перейдя при помощи эволюционных уравнений на соседнюю трубку тока. Уже в этом приближении линейный по x^2 член в квадратичной по x^2 формуле для потенциала φ учитывает пространственный заряд пучка в отличие от аналогичной конструкции при параксиальном подходе. Кроме того, геометризованный формализм допускает рассмотрение релятивистских пучков с произвольно ориентированным магнитным полем на катоде при эмиссии в ρ - и T -режимах – задача, недоступная для классической параксиальной теории или теории Овчарова [3] и Овчарова и Пензякова [4]. Алгоритм построения высших приближений сводится к дифференцированию по x^2 нужное количество раз соотношения на трубке тока и уравнений эволюционной системы и исключении возникающих производных по поперечной координате с помощью эволюционной системы предыдущего приближения.

Продольная координата x^1 на базовой трубке тока может быть определена как произвольная функция длины дуги l образующей (направляющей), поэтому этот вариант теории удобно называть l -представлением. В работах [5–7] в качестве продольной координаты во всем поле течения предло-

жено использовать потенциал электрического поля $x^1 = \varphi$ (φ -представление). От l -к φ -представлению нельзя перейти по формулам, связывающим две криволинейные системы. Изменение статуса потенциала от искомой функции к независимой переменной меняет структуру исходных уравнений, в частности, уравнение Пуассона становится уравнением первого порядка. В работе [8] при тестировании геометризованных моделей показано, что использование φ -представления может повышать точность приближенного решения.

Третий вариант геометризованной теории возможен для релятивистских потенциальных потоков с $x^1 = W$, где W — потенциал обобщенного импульса (W -представление) [9].

Цель работы — формулировка задачи расчета двумерных электростатических электронных пучков с прямой осью во втором приближении при использовании всех трех представлений геометризованной теории.

1. ТЕОРИЯ В l -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Искривленные трубки тока. Для описания двумерных электростатических пучков в l -представлении можно использовать ортогональную систему x^i . Соотношение на искривленной трубке тока в этом случае определено формулой

$$2\varphi \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \frac{1}{h_1} \varphi_{,1} \frac{1}{h_1} h_{2,1} + h_2 \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \varphi_{,1} \right)_{,1} - k_2 \operatorname{tg} \theta \frac{1}{h_1} \varphi_{,1} + 2(2k_1^2 - k_1 k_2) \varphi \right] = \frac{h_{20} h_{30} J}{h_3 u}, \quad (1)$$

$$u^2 = 2\varphi, \quad E_v = 2k_1 \varphi.$$

Здесь k_1, k_2 — главные кривизны поверхности $x^2 = \text{const}$, θ — угол наклона трубки тока к оси z , u — скорость, E_v — нормальное электрическое поле, J — плотность тока эмиссии. Для частных производных и элементов метрического тензора g_{ik} приняты обозначения

$$h_{2,1} \equiv \partial h_2 / \partial x^1, \quad \varphi_{,2} \equiv \partial \varphi / \partial x^2, \quad (2)$$

$$g_{11} = h_1^2, \quad g_{22} = h_2^2, \quad g_{33} = h_3^2.$$

Нижний индекс нуль относит значение соответствующей величины к катоду $x^1 = 0$. Уравнение (1) и все последующие формулы записаны в нормировках, исключающих из уравнений пучка все физические постоянные используемой системы единиц.

При переходе к прямой оси для осесимметричных пучков $k_2 \rightarrow \infty$

$$k_2 = -\cos \theta / h_3, \quad h_3 = R, \quad (3)$$

что требует раскрытия возникающих неопределенностей. В плоском случае $k_2 = 0, h_3 = 1$.

Эволюционная система первого порядка образована уравнениями

$$z_{,2} = -h_2 \sin \theta, \quad R_{,2} = h_2 \cos \theta,$$

$$\theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad k_{1,2} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + h_2 k_1^2,$$

$$h_{1,2} = -h_1 h_2 k_1, \quad \varphi_{,2} = h_2 E_v, \quad u_{,2} = h_2 k_1 u,$$

$$E_{v,2} = 2\varphi \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + 3h_2 k_1^2 \right]. \quad (4)$$

Первое приближение, уравнения на оси. Для перехода к оси пучка с $x^1 = z$ в осесимметричном случае необходимо раскрыть неопределенности в членах $k_1 k_2, k_2 \operatorname{tg} \theta, h_{30}/h_3$. С учетом соотношений эволюционной системы (4) и определения k_2 из (3) вблизи оси получаем

$$R = R_{,2} y, \quad \theta = \theta_{,2} y, \quad k_2 = -1/(R_{,2} y),$$

$$k_1 = k_{1,2} y, \quad y \equiv x^2; \quad k_1 k_2 = -\frac{k_{1,2}}{h_2} = -\frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}, \quad (5)$$

$$k_2 \operatorname{tg} \theta = -\frac{\theta_{,2}}{h_2} = -\frac{h_{2,1}}{h_1 h_2}, \quad \frac{h_{30}}{h_3} = \frac{h_{20}}{h_2}.$$

В случае осесимметричных и плоских систем на оси пучка $x^1 = z, h_1 = 1$ и уравнение (1) принимает соответственно вид

$$h_{2,11} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} + \frac{1}{4} \bar{\varphi}_{,11} h_2 = \frac{h_{20}^2 J}{2 h_2 u^3},$$

$$h_{2,11} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,11} h_2 = \frac{h_{20} J}{u^3}, \quad (6)$$

$$\bar{\varphi}_{,1} \equiv \varphi_{,1} / \varphi, \quad \bar{\varphi}_{,11} \equiv \varphi_{,11} / \varphi.$$

Эволюционная система образована уравнениями

$$z_{,2} = 0, \quad h_{1,2} = 0, \quad h_{2,2} = 0,$$

$$\varphi_{,2} = 0, \quad u_{,2} = 0, \quad J_{,2} = 0;$$

$$R_{,2} = h_2, \quad \theta_{,2} = h_{2,1}, \quad k_{1,2} = h_{2,11},$$

$$E_{v,2} = 2\varphi h_{2,11}. \quad (7)$$

Параметры с нулевыми производными в (7) являются четными, а с отличными — нечетными функциями x^2 .

Второе приближение. Выполнив двукратное дифференцирование по x^2 соотношения на труб-

ке тока (1) и переходя к оси с использованием уравнений (7), имеем

$$\begin{aligned} & 2\varphi(h_{2,2211} - 2h_{2,11}h_{4,22} - h_{2,1}h_{4,221}) + 2\varphi_{,22}h_{2,11} + \\ & + (\varphi_{,221} - 2\varphi_{,1}h_{4,22})h_{2,1} + \varphi_{,1}h_{2,221} + (\varphi_{11} - k_2 \operatorname{tg} \theta \varphi_{,1} - \\ & - 2k_1k_2\varphi)h_{2,22} = \left[-8k_{1,2}^2\varphi + 2(k_1k_2)_{,22}\varphi + \right. \\ & + 2k_1k_2\varphi_{,22} + (k_2 \operatorname{tg} \theta)_{,22}\varphi_{,1} + k_2 \operatorname{tg} \theta (\varphi_{,221} - \varphi_{,1}h_{4,22}) - (8) \\ & \left. - \varphi_{,2211} + 2\varphi_{,11}h_{4,22} + \varphi_{,1}h_{4,221} \right] h_2 + \\ & + \frac{h_{20}J}{u} \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} + \frac{h_{20}J}{u} \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right) \left(\frac{J_{,22}}{J} - \frac{u_{,22}}{u} \right). \end{aligned}$$

Эволюционная система второго порядка, получаемая по тому же алгоритму, что и соотношение (8), включает уравнения

$$\begin{aligned} z_{,22} &= -h_2h_{2,1}, \quad h_{1,22} = -h_2h_{2,11}, \\ \varphi_{,22} &= h_2E_{v,2}, \quad u_{,22} = h_2h_{2,11}u. \end{aligned} \quad (9)$$

Высшие производные нечетных функций определены формулами

$$\begin{aligned} R_{,222} &= h_{2,22} - h_2h_{2,1}^2, \quad \theta_{,222} = h_{2,221} - h_{2,1}h_{4,22}, \\ k_{1,222} &= h_{2,2211} + h_2h_{2,1}h_{2,111} + 4h_2h_{2,1}^2 + h_{2,1}^2h_{2,11}, \\ E_{v,222} &= 2\varphi(h_{2,2211} + h_2h_{2,1}h_{2,111} + 10h_2h_{2,1}^2 + h_{2,1}^2h_{2,11}). \end{aligned} \quad (10)$$

Четвертые производные четных функций могут быть выражены через $h_{2,22}$

$$\begin{aligned} z_{,2222} &= -h_2h_{2,221} - 3h_{2,1}h_{2,22} - h_2^2h_{2,1}h_{2,11} + h_2h_{2,1}^3, \\ h_{1,2222} &= -h_2k_{1,222} - 3(h_{2,22} + h_2h_{4,22})k_{1,2}, \\ \varphi_{,2222} &= h_2E_{v,222} + 3h_{2,22}E_{v,2}, \\ uu_{,2222} &= \varphi_{,2222} - 3u_{,22}^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметры потока. Известные на оси производные (9)–(11) позволяют построить фрагменты рядов Тэйлора по поперечной координате $x^2 \equiv y$ для искоемых параметров задачи

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 + \frac{1}{2}h_{1,22}y^2 + \frac{1}{24}h_{1,2222}y^4, \quad h_2 = h_{20} + \frac{1}{2}h_{2,22}y^2, \\ \varphi &= U + \frac{1}{2}\varphi_{,22}y^2 + \frac{1}{24}\varphi_{,2222}y^4, \\ E_v &= E_{v,2}y + \frac{1}{6}E_{v,222}y^3, \quad \theta = \theta_{,2}y + \frac{1}{6}\theta_{,222}y^3, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{1,2}y + \frac{1}{6}k_{1,222}y^3, \quad Z = z + \frac{1}{2}z_{,22}y^2 + \frac{1}{24}z_{,2222}y^4, \\ R &= R_{,2}y + \frac{1}{6}R_{,222}y^3. \end{aligned}$$

Последние два соотношения при фиксированном значении y определяют конфигурацию трубки тока, а при $z = \text{const}$ являются параметрическими уравнениями для ортогональной трубкам тока поверхности.

Вспомогательные соотношения. Для приведения уравнения (8) к окончательному виду необходимо вычислить функции $\varphi_{,221}$, $\varphi_{,2211}$, $h_{4,221}$, $h_{2,111}$ и

раскрыть неопределенности в случае осесимметричных течений. Для последних имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{,221} &= h_2E_{v,21} + h_{2,1}E_{v,2}, \quad E_{v,21} = -\frac{1}{2}h_2\varphi_{,111} - \\ & - \frac{3}{2}h_{2,1}\varphi_{,11} - h_{2,11}\varphi_{,1} - \frac{h_{20}^2J}{2h_2u} \left(\frac{h_{2,1}}{h_2} + \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{,1} \right), \\ \varphi_{,221} &= -\frac{1}{2}h_2^2\varphi_{,111} - 2h_2h_{2,1}\varphi_{,11} - (h_2h_{2,11} + h_{2,1}^2)\varphi_{,1} - \\ & - \frac{h_{20}^2J}{4u}\bar{\varphi}_{,1}, \quad \varphi_{,2211} = -\frac{1}{2}h_2^2\varphi_{,1111} - 3h_2h_{2,1}\varphi_{,111} - \\ & - 3(h_2h_{2,11} + h_{2,1}^2)\varphi_{,11} - (h_2h_{2,111} + 3h_{2,1}h_{2,11})\varphi_{,1} - \\ & - \frac{h_{20}^2J}{4u} \left(\bar{\varphi}_{,11} - \frac{3}{2}\bar{\varphi}_{,1}^2 \right), \quad h_{4,221} = -h_2h_{2,111} - h_{2,1}h_{2,11}, \\ h_{2,111} &= -\frac{1}{4}h_2(\bar{\varphi}_{,111} - \bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,11}) - \\ & - \frac{1}{2} \left(h_{2,11}\bar{\varphi}_{,1} + \frac{3}{2}h_{2,1}\bar{\varphi}_{,11} - h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1}^2 \right) - \\ & - \frac{h_{20}^2J}{2h_2u^3} \left(\frac{h_{2,1}}{h_2} + \frac{3}{2}\bar{\varphi}_{,1} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

В плоском случае выражения (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_{,221} &= -h_2^2\varphi_{,111} - 3h_2h_{2,1}\varphi_{,11} - (h_2h_{2,11} + h_{2,1}^2)\varphi_{,1} + \\ & + \frac{h_{20}J}{u} \left(h_{2,1} - \frac{1}{2}h_2\bar{\varphi}_{,1} \right), \quad \varphi_{,2211} = -h_2^2\varphi_{,1111} - \\ & - 5h_2h_{2,1}\varphi_{,111} - 4(h_2h_{2,11} + h_{2,1}^2)\varphi_{,11} - \\ & - (h_2h_{2,111} + 3h_{2,1}h_{2,11})\varphi_{,1} + \\ & + \frac{h_{20}J}{u} \left(-\frac{1}{2}h_2\bar{\varphi}_{,11} + \frac{3}{4}h_2\bar{\varphi}_{,1}^2 - h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1} + h_{2,11} \right), \\ h_{2,111} &= -\frac{1}{2}h_2(\bar{\varphi}_{,111} - \bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,11}) - \\ & - \frac{1}{2} \left(h_{2,11}\bar{\varphi}_{,1} + 2h_{2,1}\bar{\varphi}_{,11} - h_{2,1}\bar{\varphi}_{,1}^2 \right) - \frac{3}{2} \frac{h_{20}J}{u^3} \bar{\varphi}_{,1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Раскрытие неопределенностей. Для раскрытия неопределенностей на оси z необходимо использовать приносевые разложения параметров потока (12) и соотношения

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta_{,2}y + \frac{1}{6}(\theta_{,222} - \theta_{,2}^3)y^3, \\ \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2}\theta_{,2}^2y^2, \quad R_0 = \left(R_{,2}y + \frac{1}{6}R_{,222}y^3 \right)_0; \\ (k_1k_2)_{,22} &= \frac{1}{R_{,2}} \left[-\frac{1}{3}k_{1,222} + \left(\frac{1}{3}\frac{R_{,222}}{R_{,2}} + \theta_{,2}^2 \right) k_{1,2} \right], \\ (k_2 \operatorname{tg} \theta)_{,22} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{h_2} \left(\theta_{,222} - \theta_{,2}^3 - \theta_{,2} \frac{R_{,222}}{R_{,2}} \right), \\ \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} &= \frac{1}{3} \frac{h_{20}}{R_{,2}} \left[-\frac{R_{,222}}{R_{,2}} + \left(\frac{R_{,222}}{h_2} \right)_0 \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя формулы (10), (15), получаем

$$\begin{aligned} (k_1 k_2)_{,22} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{h_2} h_{2,2211} - \frac{1}{h_2^2} h_{2,11} h_{2,22} + \right. \\ &+ \left. h_{2,1} h_{2,111} + 4 h_{2,11}^2 - \frac{1}{h_2} h_{2,1}^2 h_{2,11} \right), \quad (k_2 \operatorname{tg} \theta)_{,22} = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{1}{h_2} \left(h_{2,221} - \frac{1}{h_2} h_{2,1} h_{2,22} + h_2 h_{2,1} h_{2,11} \right), \\ \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} &= \frac{1}{3} \frac{h_{20}}{h_2} \left[-\frac{1}{h_2} h_{2,22} + h_{2,1}^2 - (h_{2,1}^2)_0 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношение на оси во втором приближении. Пользуясь приведенными выше формулами, представим уравнение (8) в окончательном виде. В осесимметричном случае имеем

$$\begin{aligned} h_{2,2211} &= -\frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,221} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,11} + \frac{J}{h_2^2 u^3} \right) h_{2,22} + \\ &+ \frac{3}{16} h_2^3 \bar{\varphi}_{,1111} + \frac{7}{4} h_2^2 h_{2,1} \bar{\varphi}_{,111} + \\ &+ \left(\frac{3}{8} h_2^2 h_{2,11} + \frac{27}{8} h_2 h_{2,1}^2 \right) \bar{\varphi}_{,11} + \\ &+ \frac{3}{4} h_{2,1} (h_2 h_{2,11} + h_{2,1}^2) \bar{\varphi}_{,1} - \frac{1}{2} h_2 h_{2,1}^2 \bar{\varphi}_{,1}^2 - \\ &- \frac{1}{4} h_2^2 h_{2,1} \bar{\varphi}_{,1} \bar{\varphi}_{,11} - \frac{17}{2} h_2 h_{2,11}^2 - \frac{1}{2} h_{2,1}^2 h_{2,11} + \\ &+ \frac{h_{20} J}{h_2 u^3} \left(-\frac{3}{4} h_2 h_{2,11} + \frac{1}{2} h_{2,1}^2 - \frac{1}{4} \kappa_{10}^2 + \frac{3}{16} h_2^2 \bar{\varphi}_{,11} - \right. \\ &\left. - \frac{9}{32} h_2^2 \bar{\varphi}_{,1}^2 + \frac{9}{8} h_2 h_{2,1} \bar{\varphi}_{,1} + \frac{3}{4} \bar{J}_{,22} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь κ_{10} — кривизна катода на оси, $\bar{J}_{,22} \equiv J_{,22}/J$.

Плоские пучки описываются уравнением

$$\begin{aligned} h_{2,2211} &= -\frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,221} - \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,11} h_{2,22} + \frac{1}{2} h_2^3 \bar{\varphi}_{,1111} + \\ &+ \frac{7}{2} h_2^2 h_{2,1} \bar{\varphi}_{,111} + \left(-\frac{1}{2} h_2^2 h_{2,11} + 4 h_2 h_{2,1}^2 \right) \bar{\varphi}_{,11} - \\ &- \frac{5}{2} h_2 h_{2,1} h_{2,11} \bar{\varphi}_{,1} - \frac{1}{2} h_2^3 \bar{\varphi}_{,11}^2 - \\ &- 2 h_2 h_{2,1}^2 \bar{\varphi}_{,1}^2 - \frac{5}{2} h_2^2 h_{2,1} \bar{\varphi}_{,1} \bar{\varphi}_{,11} - 9 h_2 h_{2,11}^2 - \\ &- 2 h_{2,1}^2 h_{2,11} + \frac{h_{20} J}{u^3} \times \\ &\times \left(-h_2 h_{2,11} + \frac{3}{2} h_2^2 \bar{\varphi}_{,11} - \frac{3}{4} h_2^2 \bar{\varphi}_{,1}^2 + 6 h_2 h_{2,1} \bar{\varphi}_{,1} + \bar{J}_{,22} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Прикатодные асимптотики. Потенциал φ и коэффициент Ляме h_2 на оси вблизи катода представимы в виде разложений

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_4 z^{4/3} \left(1 + \bar{\varphi}_7 z + \bar{\varphi}_{10} z^2 + \bar{\varphi}_{13} z^3 + \bar{\varphi}_{16} z^4 + \dots \right), \\ h_2 &= b_0 \left(1 + \bar{b}_3 z + \bar{b}_6 z^2 + \bar{b}_9 z^3 + \bar{b}_{12} z^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Подстановка функций (19) в уравнение (6) для осесимметричных потоков приводит к следующим связям коэффициентов:

$$\begin{aligned} 2\varphi_4 &= \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3}, \quad \bar{\varphi}_7 = -\frac{16}{15} \bar{b}_3, \quad \bar{\varphi}_{10} = -\frac{16}{9} \bar{b}_6 + \frac{163}{150} \bar{b}_3^2, \\ \bar{b}_9 &= \frac{9}{74} \left(\frac{4898}{405} \bar{b}_3 \bar{b}_6 - \frac{122029}{30375} \bar{b}_3^3 - \frac{11}{3} \bar{\varphi}_{13} \right), \\ \bar{b}_{12} &= \frac{9}{268} \left(\frac{3004}{135} \bar{b}_3 \bar{b}_9 + \frac{2114}{81} \bar{b}_6^2 - \frac{201877}{12150} \bar{b}_3^2 \bar{b}_6 - \right. \\ &\left. - \frac{3166}{18225} \bar{b}_3^4 + \frac{1}{12} \bar{\varphi}_{10}^2 - \frac{523}{45} \bar{b}_3 \bar{\varphi}_{13} - \frac{35}{3} \bar{\varphi}_{16} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Функция $\bar{b}_{3,22}$, необходимая при формулировке начальных данных для уравнения (17), может быть выражена через коэффициенты $\bar{b}_3, \bar{b}_6, \bar{b}_9$ [1, 2]

$$\frac{1}{b_0} \bar{b}_{3,22} = -\frac{45}{2} \bar{b}_9 - \frac{13}{2} \bar{b}_3 \bar{b}_6. \quad (21)$$

Те, в свою очередь, определены коэффициентами $\bar{\varphi}_7, \bar{\varphi}_{10}, \bar{\varphi}_{13}$ разложения потенциала на оси. Таким образом, задание $\varphi(z)$ позволяет вычислить правую часть в формуле (21).

Если в качестве x^2 на катоде $x^1 = 0$ использовать отсчитанную вдоль него длину дуги, то начальные условия для интегрирования уравнения (17) определены формулами

$$\begin{aligned} h_{20} &= b_0 = 1, \quad (h_{2,22})_0 = b_{0,22} = 0, \\ (h_{2,221})_0 &= b_{3,22}. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае плоских потоков аналогичные (19) коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} 2\varphi_4 &= \left(\frac{9J}{2} \right)^{2/3}, \quad \bar{\varphi}_7 = -\frac{8}{15} \bar{b}_3, \\ \bar{\varphi}_{10} &= -\frac{8}{9} \bar{b}_6 + \frac{83}{225} \bar{b}_3^2, \quad \bar{b}_9 = -\frac{1}{148} \times \\ &\times \left(132 \bar{\varphi}_{13} + \frac{508}{5} \bar{b}_3 \bar{\varphi}_{10} + 106 \bar{b}_6 \bar{\varphi}_7 + \frac{5}{4} \bar{\varphi}_7^3 \right), \\ \bar{b}_{12} &= -\frac{9}{134} \left(\frac{35}{3} \bar{\varphi}_{16} + \frac{853}{90} \bar{b}_3 \bar{\varphi}_{13} + \frac{83}{9} \bar{b}_6 \bar{\varphi}_{10} + \right. \\ &\left. + \frac{199}{18} \bar{b}_9 \bar{\varphi}_7 + \frac{5}{24} \bar{\varphi}_7^2 \bar{\varphi}_{10} - \frac{1}{12} \bar{\varphi}_{10}^2 - \frac{35}{576} \bar{\varphi}_7^4 \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Форма катода и плотность тока эмиссии. Вторые производные главных кривизн катода κ_{10}, κ_{20} , исходя из определения этих величин в ортогональной системе [1, 2], описываются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_0^2} \kappa_{10,22} &= -\left(\frac{1}{b_0^2} \bar{b}_{3,22} + 2 \bar{b}_3 \bar{b}_6 \right), \\ \frac{1}{b_0^2} \kappa_{20,22} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{b_0^2} \bar{b}_{3,22} + 2 \bar{b}_3 \bar{b}_6 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Для второй и четвертой производных плотности тока имеем

$$\frac{1}{b_0^2} \bar{J}_{,22} = 10\bar{b}_6, \quad \frac{1}{b_0^4} \bar{J}_{,2222} = -\frac{5}{b_0^4} a_{0,2222} + 360\bar{b}_6^2. \quad (25)$$

Производная $a_{0,2222}$ следует из последнего уравнения (11)

$$\frac{1}{b_0^4} a_{0,2222} = -\frac{2}{b_0^2} \bar{b}_{6,22} - 6\bar{b}_3\bar{b}_9 - 4\bar{b}_6^2 - 2\bar{b}_3^2\bar{b}_6. \quad (26)$$

Способ вычисления $\bar{b}_{6,22}$ обсуждается в [1, 2] и приводит к следующему результату в осесимметричном и плоскосимметричном случаях соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_0^2} \bar{b}_{6,22} = & -\frac{3}{4} \left(4\bar{b}_3\bar{b}_9 + \frac{67}{6} \bar{b}_6^2 + \frac{2}{3} \bar{b}_3^2\bar{b}_6 + \right. \\ & + \frac{489}{400} \bar{b}_3 \frac{1}{b_0^2} T_{0,22} + \frac{9}{8} \frac{1}{b_0^2} \bar{\Phi}_{10,22} \left. \right), \quad \frac{1}{b_0^2} \bar{b}_{6,22} = -3\bar{b}_3\bar{b}_9 - \\ & - \frac{17}{2} \bar{b}_6^2 - \bar{b}_3^2\bar{b}_6 - \frac{83}{100} \bar{b}_3 \frac{1}{b_0^2} \kappa_{10,22} - \frac{9}{8} \frac{1}{b_0^2} \bar{\Phi}_{10,22}. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение для $\bar{\Phi}_{10,22}$ может быть найдено из уравнения для $\Phi_{,22}$ из (9) и остается одинаковым для плоских и осесимметричных течений при разном смысле входящих в формулу коэффициентов

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_0^2} \bar{\Phi}_{10,22} = & 24\bar{b}_{12} + 12\bar{b}_3\bar{b}_9 + 4\bar{b}_6^2 + \\ & + (12\bar{b}_9 + 4\bar{b}_3\bar{b}_6) \bar{\Phi}_7 + 4\bar{b}_6 \bar{\Phi}_{10}. \end{aligned} \quad (28)$$

2. ТЕОРИЯ В Φ -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Искривленные трубки тока. При использовании в качестве продольной координаты потенциала электрического поля $x^1 = \Phi$ система x^1, x^2 неортогональна во всем поле течения [5–7] за исключением поверхности катода $x^1 = 0$ и вырожденной трубки тока – оси пучка $x^2 = 0$. Для электростатических потоков соотношение на произвольной трубке тока, сформулированное в [6] в случае релятивистских пучков в магнитном поле, принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{u^2}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \left(\frac{1}{h_1} - 2\sin\theta_{12}\cos\theta_{12}u^2 \frac{1}{h_1} f_{,1} \right) \frac{h_{2,1}}{h_1} + \\ & + \left\{ -\frac{1}{h_1\sin\theta_{12}} \frac{\cos\vartheta}{h_3} + \frac{1}{h_1} \left(k_1 + \cos^2\theta_{12} \frac{1}{h_1} f_{,1} \right) f + \right. \\ & + \left[k_1^2 + f \frac{1}{h_1} k_{1,1} + \sin^2\theta_{12} (3\cos^2\theta_{12} - 1) \left(\frac{1}{h_1} f_{,1} \right)^2 - \right. \\ & - \sin\theta_{12}\cos\theta_{12} \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} f_{,1} \right)_{,1} \left. \right] u^2 + \frac{1}{h_1\sin^2\theta_{12}} \left(\frac{1}{h_1} \right)_{,1} \left. \right\} h_2 = \\ & = \frac{h_{20}h_{30}J}{h_3u\sin\theta_{12}}, \quad \vartheta = \theta + \theta_{12}, \quad f = \operatorname{ctg}\theta_{12}, \\ & \sin\theta_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \quad \cos\theta_{12} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь θ_{12} – угол между осями x^1, x^2 .

Следствием определения продольной координаты $x^1 = \Phi$ являются соотношения, следующие из интеграла энергии и выражения для косоугольной проекции электрического поля на нормаль к поверхности $x^2 = \text{const}$:

$$2\Phi = u^2, \quad \frac{1}{h_2} \Phi_{,2} = \sin\theta_{12}k_1u^2 + \cos\theta_{12} \frac{1}{h_1} \Phi_{,1}. \quad (30)$$

Эти соотношения описываются формулами

$$uu_{,1} = 1, \quad h_1\sin\theta_{12}k_1u^2 + \cos\theta_{12} = 0. \quad (31)$$

Последнее из них определяет закон изменения угла θ_{12} на произвольной трубке тока и позволяет вычислить поперечную производную $f_{,2}$

$$\begin{aligned} f_{,2} = & -u^2 (h_{1,2}k_1 + h_1k_{1,2}), \\ \theta_{12,2} = & -\sin^2\theta_{12}f_{,2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Прочие уравнения, составляющие эволюционную систему первого порядка, определены выражениями

$$\begin{aligned} z_{,2} = & h_2\cos\vartheta, \quad R_{,2} = h_2\sin\vartheta, \\ \theta_{,2} = & \sin\theta_{12} \frac{h_{2,1}}{h_1} + h_2\cos\theta_{12} \left(k_1 - \sin^2\theta_{12} \frac{1}{h_1} f_{,1} \right), \\ h_{1,2} = & h_1h_2\sin\theta_{12} \left(\sin^2\theta_{12} \frac{1}{h_1} f_{,1} - k_1 \right) + h_{2,1}\cos\theta_{12}, \\ k_{1,2} = & h_2\cos\theta_{12} \frac{1}{h_1} k_{1,1} + h_2\sin\theta_{12}k_1^2 + \\ & + \sin\theta_{12} \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \sin^3\theta_{12} \left[-h_2f \left(\frac{1}{h_1} f_{,1} \right)_{,1} + \right. \\ & + h_2 \left(3\cos^2\theta_{12} - 1 \right) \left(\frac{1}{h_1} f_{,1} \right)^2 - 2f \frac{h_{2,1}}{h_1} \frac{1}{h_1} f_{,1} \left. \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Первое приближение, уравнения на оси. Переход к оси в уравнении (29) приводит к следующим соотношениям для осесимметричных и плоскосимметричных пучков:

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \frac{1}{h_1} \frac{h_{2,1}}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{h_{1,1}}{h_1^3} h_2 = & \frac{1}{2} \frac{h_{20}^2 J}{h_2 u}, \\ \frac{u^2}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \frac{1}{h_1} \frac{h_{2,1}}{h_1} - \frac{h_{1,1}}{h_1^3} h_2 = & \frac{h_{20} J}{u}. \end{aligned} \quad (34)$$

Уравнения эволюционной системы на оси z имеют вид

$$\begin{aligned} R_{,2} = & h_2, \quad \theta_{,2} = \frac{h_{2,1}}{h_1}, \quad k_{1,2} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}, \\ f_{,2} = & -u^2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}, \quad \theta_{12,2} = u^2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Агрегат $\cos\vartheta/h_3$ в (29) в осесимметричном случае раскрывается следующим образом:

$$\frac{\cos\vartheta}{h_3} = -\frac{1}{h_2} (\theta_{,2} + \theta_{12,2}). \quad (36)$$

Второе приближение. Уравнение (29) после двукратного дифференцирования по x^2 и перехода к оси пучка принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{u^2}{h_1^2} h_{2,2211} + \frac{1}{h_1^2} \left(1 - u^2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) h_{2,221} - \\ & - \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{h_{1,1}}{h_1} - \frac{\cos \vartheta}{h_3} \right) h_{2,22} - \frac{1}{h_1^3} (h_2 + u^2 h_{2,1}) h_{1,221} + \\ & + \frac{1}{h_1^3} \left[u^2 \left(-2h_{2,11} + 3h_{2,1} \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) + \right. \\ & + \left. \left(-2h_{2,1} + 3h_2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) \right] h_{1,22} + \frac{h_2}{h_1} k_{1,2} f_{,2} + \\ & + \left\{ \left[2 \frac{1}{h_1} k_{1,21} f_{,2} + 2k_{1,2}^2 - 2 \frac{1}{h_1^2} f_{,2} f_{,211} + \right. \right. \\ & + \left. \left. 2 \frac{1}{h_1^2} f_{,21} \left(\left(\frac{h_{1,1}}{h_1} - 2 \frac{h_{2,1}}{h_2} \right) f_{,2} - f_{,21} \right) \right] u^2 - \right. \\ & - \left. 2 \frac{1}{h_1^2} \frac{h_{1,1}}{h_1} f_{,2}^2 \right\} h_2 - h_2 \left(\frac{1}{h_1 \sin \theta_{12}} \frac{\cos \vartheta}{h_3} \right)_{,22} = \\ & = \frac{h_{20} J}{u} \left[\left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} + \frac{h_{30}}{h_3} (\bar{J}_{,22} + f_{,2}^2) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

При получении уравнения (37) использованы соотношения

$$\begin{aligned} (\sin \theta_{12})_{,2} &= 0, \quad (\cos \theta_{12})_{,2} = f_{,2}, \\ (\sin \theta_{12})_{,22} &= -f_{,2}^2, \quad (\cos \theta_{12})_{,22} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Эволюционная система. Система эволюционных уравнений во втором приближении определена формулами

$$\begin{aligned} h_{1,22} &= -u^2 \left[h_2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1,1} - 3h_2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} \right], \\ z_{,22} &= -h_2 \left[u^2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \frac{h_{2,1}}{h_1} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Для высших производных нечетных функций получаем

$$\begin{aligned} R_{,222} &= h_{2,22} - h_2 \vartheta_{,2}^2, \quad \theta_{12,222} = -f_{,222} + 2f_{,2}^3, \\ \theta_{,222} &= \frac{1}{h_1} h_{2,221} - 2 \frac{h_{2,1}}{h_1} f_{,2} f_{,21} - \frac{h_{2,1}}{h_1} f_{,2}^2 - \\ & - \frac{h_{1,22}}{h_1^2} h_{2,1} + 2h_2 f_{,2} k_{1,2}, \\ k_{1,222} &= -2h_2 f_{,2} \left(\frac{1}{h_1} f_{,21} \right)_{,1} - 4 \frac{h_{2,1}}{h_1^2} f_{,2} f_{,21} - \\ & - 2 \frac{h_2}{h_1^2} f_{,21}^2 + 2 \frac{h_2}{h_1} f_{,2} k_{1,21} + 2h_2 k_{1,2}^2 - f_{,2}^2 k_{1,2}, \\ f_{,222} &= -u^2 \left(\frac{1}{h_1} h_{2,2211} - \frac{h_{1,1}}{h_1^2} h_{2,21} - \frac{h_{1,22}}{h_1^2} h_{2,11} + \right. \\ & + \left. 2 \frac{h_{1,1}}{h_1^3} h_{1,22} h_{2,1} - \frac{h_{2,1}}{h_1^2} h_{1,221} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Входящие в уравнение (37) комплексы описываются формулами

$$\begin{aligned} (\cos \vartheta)_{,222} &= -(\theta_{,222} - \theta_{,2}^3 + \theta_{12,222} - \theta_{12,2}^3) + \\ & + 3\theta_{,2} \theta_{12,2} (\theta_{,2} + \theta_{12,2}), \\ f_{,21} &= -u^2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,11} - 2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1}, \\ f_{,211} &= -u^2 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,111} - 4 \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,11}, \\ k_{1,21} &= \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1,1} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Для четвертых производных z и h_1 получаем

$$\begin{aligned} z_{,2222} &= h_2 \left[-(\theta_{,222} - \theta_{,2}^3 + \theta_{12,222} - \theta_{12,2}^3) + \right. \\ & + \left. 3h_2 (\theta_{,2} + \theta_{12,2}) \right] + \\ h_{1,2222} &= 3f_{,2} h_{2,221} + (f_{,21} - h_1 k_{1,2}) h_{2,22} - \\ & - h_1 h_2 k_{1,222} + h_2 (5h_1 f_{,2}^2 - h_{1,22}) k_{1,2} + h_2 f_{,2221} + \\ & + h_{2,1} (f_{,222} - 3f_{,2}^3) + 3h_2 f_{,2}^2 f_{,21} - 2h_{1,22} \frac{1}{h_1} f_{,21}. \end{aligned} \quad (42)$$

Соотношение на оси во втором приближении. Ответственные за осесимметричность члены в (37), содержащие неопределенности, раскрываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \vartheta}{h_3} &= -\frac{1}{h_2} \vartheta_{,2}, \\ \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} &= \frac{1}{3} \frac{h_{20}}{h_2} \left[-\frac{1}{h_2} h_{2,22} + \vartheta_{,2}^2 - \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_0^2 \right], \\ \left(\frac{1}{h_1 \sin \theta_{12}} \frac{\cos \vartheta}{h_3} \right)_{,22} &= -\frac{\vartheta_{,2}}{h_1 h_2} \left(-\frac{h_{1,22}}{h_1} + f_{,2}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left[-\frac{1}{3} (\vartheta_{,222} - \theta_{,2}^3 - \theta_{12,2}^3) + \right. \\ & + \left. \theta_{,2} \theta_{12,2} \vartheta_{,2} + \frac{1}{3} \frac{\vartheta_{,2}}{h_2} (h_{2,22} - h_2 \vartheta_{,2}^2) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Функция $h_{2,22}$ для осесимметричных потоков удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{4u^2}{3h_1^2} h_{2,2211} + \frac{4}{3} \left(1 - u^2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) h_{2,221} - \\ & - \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{h_{1,1}}{h_1} + \frac{4}{3} \frac{\vartheta_{,2}}{h_2} \right) h_{2,22} - \frac{1}{h_1^3} \left(h_2 + \frac{4}{3} u^2 h_{2,1} \right) h_{1,221} + \\ & + \frac{1}{h_1^3} \left[u^2 \left(-\frac{8}{3} h_{2,11} + \frac{14}{3} h_2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) - \frac{8}{3} h_{2,1} + 3h_2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right] h_{1,22} + \\ & + \frac{5h_2}{3h_1} k_{1,2} f_{,2} + \left\{ u^2 \left[2 \frac{1}{h_1} k_{1,21} f_{,2} + 2k_{1,2}^2 - \frac{2}{h_1^2} f_{,2} f_{,211} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{2}{h_1^2} f_{,21} \left(\frac{h_{1,1}}{h_1} f_{,2} - f_{,21} \right) + \frac{1}{h_1^2} h_2 \right. \\ & \times \left. \left(h_{2,11} - \frac{h_{1,1}}{h_1} h_{2,1} \right) f_{,2}^2 - \frac{4}{h_1^2} \frac{h_{2,1}}{h_2} f_{,2} f_{,21} \right] + \end{aligned} \quad (44)$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{1}{h_1 h_2} f_{,2}^3 + \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{2}{3} \frac{h_{2,1}}{h_2} - 2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) f_{,2}^2 - \frac{2}{3} \frac{1}{h_1^2} f_{,2} f_{,21} \Big\} h_2 =$$

$$= \frac{G h_{20}^2}{h_2 u} \left\{ \frac{1}{3} \left[-\frac{h_{2,22}}{h_2} + \vartheta_{,2}^2 - \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_0^2 \right] + \bar{J}_{,22} + f_{,2}^2 \right\}.$$

Для плоскосимметричных течений имеем

$$\frac{u^2}{h_1^2} h_{2,2211} + \frac{1}{h_1^2} \left(1 - u^2 \frac{h_{1,1}}{h_1} \right) h_{2,221} - \frac{1}{h_1^2} \frac{h_{1,1}}{h_1} h_{2,22} -$$

$$- \frac{1}{h_1^3} \left(h_2 + u^2 h_{2,1} \right) h_{1,221} + \frac{1}{h_1^3} \left[u^2 \left(-2 h_{2,11} + 3 \frac{h_{1,1}}{h_1} h_{2,1} \right) - \right.$$

$$\left. - 2 h_{2,1} + 3 \frac{h_{1,1}}{h_1} h_2 \right] h_{1,22} + \frac{h_2}{h_1} k_{1,2} f_{,2} +$$

$$+ \left\{ u^2 \left[2 \frac{1}{h_1} k_{1,21} f_{,2} + 2 k_{1,2}^2 - \frac{2}{h_1^2} f_{,2} f_{,211} + \right. \right.$$

$$+ \frac{2}{h_1^2} f_{,21} \left[\left(\frac{h_{1,1}}{h_1} - 2 \frac{h_{2,1}}{h_2} \right) f_{,2} - f_{,21} \right] \right] -$$

$$\left. - \frac{2}{h_1^2} \frac{h_{1,1}}{h_1} f_{,2}^2 \right\} h_2 = \frac{h_{20} J}{u} (\bar{J}_{,22} + f_{,2}^2). \quad (45)$$

Параметры потока. В силу специфики ϕ -варианта теории формула для ϕ из (12) не может быть использована. Задавая точку z на оси, мы тем самым определяем значение потенциала $\phi(z)$ и, воспользовавшись параметрическими уравнениями $R = R(z, y)$, $Z = Z(z, y)$, найдем точку пересечения трубки тока $x^2 \equiv y = \text{const}$ с эквипотенциалью $x^1 = \phi$, приносящей в эту точку выбранное значение потенциала.

Функция $h_1(z) = h_1(\phi)$ на оси известна и определяется зависимостью $\phi(z)$ через обратную функцию $z = z(\phi)$:

$$h_1(\phi) = \frac{1}{\phi'(z(\phi))}. \quad (46)$$

Прикаточные асимптотики. Функции h_1 , h_2 вблизи стартовой поверхности $x^1 = 0$ имеют следующие асимптотики:

$$h_1 = a_0 x^{-1/4} \left(1 + \bar{a}_3 x^{3/4} + \bar{a}_6 x^{6/4} + \dots \right),$$

$$x \equiv \phi = x^1, \quad (47)$$

$$h_2 = b_0 \left(1 + \bar{b}_3 x^{3/4} + \bar{b}_6 x^{6/4} + \dots \right).$$

Подстановка разложений (47) в уравнения (34) позволяет установить связь между коэффициентами a_k , b_k . В осесимметричном и плоском случаях имеем соответственно

$$a_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}J}, \quad \bar{a}_3 = \frac{8}{5}\bar{b}_3, \quad \bar{a}_6 = 4\bar{b}_6 - \frac{297}{200}\bar{b}_3^2,$$

$$a_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}J}, \quad \bar{a}_3 = \frac{4}{5}\bar{b}_3, \quad \bar{a}_6 = 2\bar{b}_6 + \frac{17}{100}\bar{b}_3^2. \quad (48)$$

Имея в виду формулу (46), выразим коэффициенты a_k через коэффициенты разложения потенциала, обратив ряд

$$\phi = \phi_4 z^{4/3} \left(1 + \bar{\phi}_7 z + \bar{\phi}_{10} z^2 + \dots \right),$$

$$z = \bar{x}^{3/4} \left(1 + \bar{Z}_3 \bar{x}^{3/4} + \bar{Z}_6 \bar{x}^{6/4} + \dots \right), \quad \bar{x} \equiv (\phi/\phi_4)^{1/4}, \quad (49)$$

$$\bar{Z}_3 = -\frac{3}{4}\bar{\phi}_7, \quad \bar{Z}_6 = -\frac{3}{4}\bar{\phi}_{10} + \frac{39}{32}\bar{\phi}_7^2.$$

Коэффициент при $d\phi$ в выражении для dz определяет функцию h_1

$$dz = \frac{3}{4} \bar{x}^{-1/4} \left[1 - \frac{3}{2} \bar{\phi}_7 \bar{x}^{3/4} + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{9}{4} \bar{\phi}_{10} + \frac{117}{32} \bar{\phi}_7^2 \right) \bar{x}^{6/4} + \dots \right] \frac{d\phi}{\phi_4}. \quad (50)$$

Перейдем от $\bar{x}$ в (50) к $\phi \equiv x$

$$h_1 = (8J^2 x)^{-1/4} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{J^2}} \bar{\phi}_7 x^{3/4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}}{J} \left(-\bar{\phi}_{10} + \frac{13}{8} \bar{\phi}_7^2 \right) x^{6/4} + \dots \right]. \quad (51)$$

Сопоставление разложений (47), (48) с рядом (51) позволяет установить связь между коэффициентами b_k и ϕ_k . Последние известны из теории антипараксиальных разложений [1, 2]:

$$\phi_7 = \frac{8}{15} T_0, \quad \bar{\phi}_{10} = \frac{83}{225} (\kappa_{10}^2 + \kappa_{20}^2) +$$

$$+ \frac{157}{450} \kappa_{10} \kappa_{20} - \frac{4}{45} (\bar{J}_{,22} - k_2 \bar{J}_{,2}), \quad (52)$$

$$T_0 = \kappa_{10} + \kappa_{20}.$$

В осесимметричном и плоском случаях имеем соответственно $\kappa_{10} = \kappa_{20}$, $(-k_2 \bar{J}_{,2}) = \bar{J}_{,22}$ и $\kappa_{20} = (-k_2 \bar{J}_{,2}) = 0$.

Для интегрирования уравнений (34), (37) необходимо указать значения функций h_2 , $h_{2,22}$ и их производных (21). Кривизна катода и ее вторая производная на оси определяют величины $\bar{b}_3$, $\bar{b}_{3,22}$. Локальная ортогональность системы при $x^1 = 0$ позволяет воспользоваться формулой для кривизны в случае ортогональных координат

$$\kappa_1 = -\frac{h_{2,1}}{h_1 h_2}, \quad \kappa_{10} = -\frac{3}{4} \frac{\bar{b}_3}{a_0},$$

$$\kappa_{10,22} = -\frac{3}{4} \frac{1}{a_0} \left(\bar{b}_{3,22} - \bar{b}_3 \frac{a_{0,22}}{a_0} \right), \quad (53)$$

$$\bar{b}_{3,22} = -\frac{4}{3} a_0 \kappa_{10,22} - \frac{1}{2} \bar{b}_3 \bar{J}_{,22}.$$

Выражение для a_0 в (48) справедливо не только на оси, но и на всей поверхности катода [5], и по этой причине допускает дифференцирование по x^2 .

3. ТЕОРИЯ В W -ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Искривленные трубки тока. Теория потенциальных релятивистских потоков во внешнем магнитном поле с потенциалом W обобщенного импульса $\vec{P} = \nabla W$ в качестве продольной координаты построена в работе [9]. При рассмотрении электростатических течений возможно использование ортогональных координат.

Соотношение на трубке тока для этого случая описывается формулой

$$2\varphi \frac{1}{h_1} \left(\frac{h_{2,1}}{h_1} \right)_{,1} + \frac{h_{2,1}}{h_1} \frac{\varphi_{,1}}{h_1} + \left[\frac{1}{h_1} \left(\frac{\varphi_{,1}}{h_1} \right)_{,1} - k_2 \operatorname{tg} \theta \frac{\varphi_{,1}}{h_1} + 2(2k_1^2 - k_1 k_2) \varphi \right] h_2 = \frac{h_{20} h_{30} J}{h_3 u}. \quad (54)$$

Метрика системы координат, как и в φ -варианте теории, является сингулярной:

$$h_1 = \frac{1}{u}, \quad u^2 = 2\varphi, \quad E_v = 2k_1 \varphi. \quad (55)$$

Система эволюционных уравнений первого приближения имеет вид (4). Выражение для h_1 из (55) позволяет выразить $h_{1,2}$ через скорость

$$h_{1,2} = -u_{,2}/u^2 \quad (56)$$

и исключить h_1 из соотношения на трубке тока (54):

$$2\varphi h_{2,11} + 2\varphi_{,1} h_{2,1} + \left(\varphi_{,11} + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi} - k_2 \operatorname{tg} \theta \frac{\varphi_{,1}}{u} + 2k_1^2 - k_1 k_2 \right) h_2 = \frac{h_{20} h_{30} J}{h_3 u^3}. \quad (57)$$

Первое приближение, уравнения на оси. Уравнения эволюционной системы в этом случае принимают вид

$$R_{,2} = h_2, \quad \theta_{,2} = u h_{2,1}, \quad k_{1,2} = 2\varphi h_{2,11} - h_{2,1} \varphi_{,1}, \quad E_{v,2} = 2\varphi k_{1,2}. \quad (58)$$

Соотношения на оси для осесимметричных и плоскосимметричных потоков описываются выражениями

$$h_{2,11} + \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} + \frac{1}{4} \left(\bar{\varphi}_{,11} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1}^2 \right) h_2 = \frac{h_{20}^2 J}{2h_2 u^5}, \quad (59)$$

$$h_{2,11} + \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} + \frac{1}{2} \left(\bar{\varphi}_{,11} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1}^2 \right) h_2 = \frac{h_{20} J}{u^5}.$$

Связь продольной координаты $x^1 = W$ с z на оси пучка определяется формулой

$$x^1 = W = \int u(z) dz. \quad (60)$$

Второе приближение. Общее для двух рассматриваемых геометрических конфигураций пучка соотношение на оси во втором приближении имеет вид

$$2\varphi h_{2,2211} + 2\varphi_{,1} h_{2,221} + \left(\varphi_{,11} + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi} - k_2 \operatorname{tg} \theta \frac{\varphi_{,1}}{u} - k_1 k_2 \right) h_{2,22} = -2\varphi_{,22} h_{2,11} - 2\varphi_{,221} h_{2,1} + \left[-\varphi_{,2211} - \frac{1}{\varphi} \varphi_{,1} \varphi_{,221} + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi} \varphi_{,22} + k_2 \operatorname{tg} \theta \left(\frac{\varphi_{,1}}{u} \right)_{,22} + (k_2 \operatorname{tg} \theta)_{,22} \frac{\varphi_{,1}}{u} + (k_1 k_2)_{,22} - 4k_{1,2}^2 \right] h_2 + \frac{h_{20} J}{u^3} \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} + \frac{h_{30}}{h_3} \frac{h_{20} J}{u^3} \left(\bar{J}_{,22} - \frac{3}{2} \frac{J}{u^3} \frac{\varphi_{,22}}{\varphi} \right). \quad (61)$$

Уравнения эволюционной системы второго приближения и высших производных параметров пучка описываются выражениями

$$z_{,22} = -u h_2 h_{2,1}, \quad \varphi_{,22} = 2h_2 \varphi (2\varphi h_{2,11} + \varphi_{,1} h_{2,1}),$$

$$R_{,222} = h_{2,22} - 2\varphi h_2 h_{2,1}^2,$$

$$\theta_{,222} = u h_{2,221} + u (2\varphi h_{2,11} + \varphi_{,1} h_{2,1}) h_{2,2,1},$$

$$k_{1,222} = 2\varphi h_{2,2211} + \varphi_{,1} h_{2,221} + 16\varphi^2 h_2 h_{2,1}^2 - 22\varphi \varphi_{,1} h_2 h_{2,1} h_{2,11} + 4\varphi^2 h_2 h_{2,1}^2 + 2(2\varphi^2 h_2 h_{2,111} + 2\varphi^2 h_{2,1} h_{2,11} + \varphi \varphi_{,1} h_{2,1}^2) h_{2,1},$$

$$E_{v,222} = 2\varphi (k_{1,222} + 2h_2 k_{1,2}^2) + 2\varphi_{,22} k_{1,2},$$

$$\varphi_{,2222} = h_2 E_{v,222} + 3h_{2,22} E_{v,2},$$

$$z_{,2222} = -h_2 \theta_{,222} + h_2 \theta_{,2}^3 - 3h_{2,22} \theta_{,2}. \quad (62)$$

Для преобразований уравнения (61) воспользуемся формулами (15), (62) и следующими связями:

$$k_2 \operatorname{tg} \theta = -u \frac{h_{2,1}}{h_2}, \quad (\cos \theta)_{,22} = -2\varphi h_{2,1}^2,$$

$$\left(\frac{\varphi_{,1}}{u} \right)_{,22} = \frac{1}{u} \varphi_{,221} - \frac{1}{u^3} \varphi_{,1} \varphi_{,22},$$

$$\left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} = -\frac{1}{3} \frac{h_{20}}{h_2^2} (h_{2,22} - 2\varphi h_2 h_{2,1}^2), \quad (63)$$

$$\varphi_{,221} = 2(2\varphi^2 h_2 h_{2,111} + 5\varphi \varphi_{,1} h_2 h_{2,11} + 2\varphi^2 h_{2,1} h_{2,11} + \varphi \varphi_{,1} h_{2,1}^2 + \varphi_{,1}^2 h_2 h_{2,1}),$$

$$\varphi_{,2211} = 2[2\varphi^2 h_2 h_{2,1111} + (9\varphi \varphi_{,1} h_2 + 4\varphi^2 h_{2,1}) h_{2,111} + (5\varphi \varphi_{,11} h_2 + 11\varphi \varphi_{,1} h_{2,1} + 6\varphi_{,1}^2 h_2) h_{2,11} + 2\varphi^2 h_{2,1}^2 + (2\varphi_{,1}^2 + \varphi \varphi_{,11}) h_{2,1}^2 + 2\varphi_{,1} \varphi_{,11} h_2 h_{2,1}].$$

В результате получим¹

¹ Обратим внимание на однородную структуру коэффициентов, включающих функцию $h_{2,22}$ и ее производные (φ «упоминается» один раз, производная по x^1 — два раза), и членов в квадратной скобке при h_2 (h_2 и φ упоминаются по два раза, производная по x^1 — четыре раза).

$$\begin{aligned}
& 2\varphi h_{2,2211} + 2\varphi_1 h_{2,221} + \\
& + \left(\varphi_{,11} + \frac{1}{2} \frac{\varphi_{,1}^2}{\varphi} - k_2 \operatorname{tg} \theta \frac{\varphi_{,1}}{u} - k_1 k_2 \right) h_{2,22} = \\
& = \left[(k_1 k_2)_{,22} + (k_2 \operatorname{tg} \theta)_{,22} \frac{\varphi_{,1}}{u} + k_2 \operatorname{tg} \theta \left(\frac{\varphi_{,1}}{u} \right)_{,22} - \right. \\
& - 4\varphi^2 h_2 h_{2,1111} - (16\varphi^2 h_{2,1} + 22\varphi \varphi_{,1} h_2) h_{2,111} - \\
& - 28\varphi^2 h_{2,11}^2 - \left(66\varphi \varphi_{,1} h_{2,1} + 8\varphi^2 \frac{1}{h_2} h_{2,1}^2 + 22\varphi_{,1}^2 h_2 \right) \times (64) \\
& \times h_{2,11} - 4\varphi \varphi_{,1} \frac{1}{h_2} h_{2,1}^3 - \left(14\varphi_{,1}^2 + 2\varphi \varphi_{,11} \right) h_{2,1}^2 - \\
& - \left(4\varphi_{,1} \varphi_{,11} + \frac{\varphi_{,1}^3}{\varphi} \right) h_2 h_{2,1} \left. \right] h_2 + \frac{h_{20} J}{u^3} \left(\frac{h_{30}}{h_3} \right)_{,22} + \\
& + \frac{h_{30}}{h_3} \frac{h_{20} J}{u^3} \left[\bar{J}_{,22} - 3 \frac{J h_2}{u^3} (2\varphi h_{2,11} + \varphi_{,1} h_{2,1}) \right].
\end{aligned}$$

Раскрытие неопределенностей на оси с помощью приведенных выше формул дает для осесимметричного потока уравнение

$$\begin{aligned}
& \frac{8}{3} h_{2,2211} + \frac{4}{3} \bar{\varphi}_1 h_{2,221} + \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{7}{6} \bar{\varphi}_{,11} - \frac{5}{12} \bar{\varphi}_{,1}^2 + \frac{4}{3} \frac{1}{h_2} (h_{2,11} + \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1}) \right] h_{2,22} = \\
& = 2\varphi \left[-h_2 h_{2,1111} - \left(4h_{2,1} + \frac{11}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_2 \right) h_{2,111} - 3h_{2,11}^2 - \right. \\
& - \left(2 \frac{1}{h_2} h_{2,1}^2 + \frac{11}{2} \bar{\varphi}_{,1}^2 h_2 - \frac{79}{6} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} \right) h_{2,11} - \bar{\varphi}_{,1} \frac{1}{h_2} h_{2,1}^3 - \\
& - \left(\frac{17}{6} \bar{\varphi}_{,1}^2 + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} \right) h_{2,1}^2 - \left(\bar{\varphi}_{,1} \bar{\varphi}_{,11} + \frac{1}{4} \bar{\varphi}_{,1}^3 \right) h_2 h_{2,1} \left. \right] h_2 + \\
& + \frac{h_{20}^2 J}{h_2 u^5} \left[\bar{J}_{,22} - 3 \frac{J h_2}{u} \left(h_{2,11} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} \right) \right] + \frac{1}{3} \frac{h_{20}^2 J}{h_2 u^3} h_{2,1}^2. \quad (65)
\end{aligned}$$

Уравнение плоского пучка получается из (64), если опустить члены с k_2 и положить $h_{30} = h_3 = 1$, в результате чего член с плотностью тока в правой части примет вид

$$\frac{h_{20} J}{u^3} \left[\bar{J}_{,22} - 3 \frac{J h_2}{u} \left(h_{2,11} + \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{,1} h_{2,1} \right) \right]. \quad (66)$$

Третьи и четвертые производные h_2 по продольной координате получаются при дифференцировании уравнений (59).

Прикатодные асимптотики. Коэффициенты Ляме вблизи стартовой поверхности имеют вид разложений

$$\begin{aligned}
h_1 &= a_0 x^{-2/5} \left(1 + \bar{a}_3 x^{3/5} + \bar{a}_6 x^{6/5} + \dots \right), \\
h_2 &= b_0 \left(1 + \bar{b}_3 x^{3/5} + \bar{b}_6 x^{6/5} + \dots \right), \quad (67) \\
x &\equiv x^1 = W.
\end{aligned}$$

Подобно случаю φ -представления, обратим функцию (60) и выразим z через W

$$\begin{aligned}
u &= V_2 z^{2/3} \left(1 + \bar{V}_5 z + \bar{V}_8 z^2 + \dots \right), \\
W &= \frac{3}{5} V_2 z^{5/3} \left(1 + \frac{5}{8} \bar{V}_5 z + \frac{5}{11} \bar{V}_8 z^2 + \dots \right), \quad (68) \\
z &= Z_0 x^{3/5} \left(1 + \bar{Z}_3 x^{3/5} + \bar{Z}_6 x^{6/5} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Коэффициенты разложения скорости u известны [1, 2], причем коэффициенты $\bar{Z}_k$ выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \left(\frac{5}{3V_2} \right)^{3/5}, \quad \bar{Z}_3 = -\frac{3}{8} Z_0 \bar{V}_5, \\
\bar{Z}_6 &= Z_0^2 \left(\frac{3}{11} \bar{V}_8 + \frac{21}{64} \bar{V}_5^2 \right), \\
V_2 &= \left(\frac{9J}{2} \right)^{1/3}, \quad (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{V}_5 &= \frac{4}{15} T_0, \quad \bar{V}_8 = \frac{67}{450} (\kappa_{10}^2 + \kappa_{20}^2) + \\
&+ \frac{31}{300} \kappa_{10} \kappa_{20} - \frac{2}{45} (\bar{J}_{,22} - k_2 \bar{J}_{,2}).
\end{aligned}$$

Множитель перед dW в выражении для dz определяет коэффициент Ляме h_1

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{3}{5} Z_0, \quad \bar{a}_3 = -\frac{3}{4} Z_0 \bar{V}_5, \\
\bar{a}_6 &= Z_0^2 \left(\frac{9}{11} \bar{V}_8 + \frac{63}{64} \bar{V}_5^2 \right). \quad (70)
\end{aligned}$$

Для определения коэффициентов $\bar{b}_k$ потенциал φ необходимо переразложить по W

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_4 z^{4/3} \left(1 + \bar{\varphi}_7 z + \bar{\varphi}_{10} z^2 + \dots \right) = \\
&= \Phi_0 x^{4/5} \left(1 + \bar{\Phi}_3 x^{3/5} + \bar{\Phi}_6 x^{6/5} + \dots \right), \quad (71) \\
\Phi_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{25J}{2} \right)^{2/5}, \quad \bar{\Phi}_3 = \frac{3}{4} Z_0 \bar{\varphi}_7, \\
\bar{\Phi}_6 &= Z_0^2 \left(\bar{\varphi}_{10} - \frac{4}{11} \bar{V}_8 - \frac{41}{32} \bar{V}_5^2 \right).
\end{aligned}$$

Аналогичные выражения для скорости имеют вид

$$\begin{aligned}
u &= U_0 x^{2/5} \left(1 + \bar{U}_3 x^{3/5} + \bar{U}_6 x^{6/5} + \dots \right), \\
U_0^2 &= 2\Phi_0, \quad \bar{U}_3 = \frac{3}{8} Z_0 \bar{\varphi}_7, \quad (72) \\
\bar{U}_6 &= \frac{1}{2} Z_0^2 \left(\bar{\varphi}_{10} - \frac{4}{11} \bar{V}_8 - \frac{59}{32} \bar{V}_5^2 \right).
\end{aligned}$$

Разложения (71), (72) позволяют перейти к рассмотрению уравнений (59). В результате для осесимметричного пучка получаем

$$\begin{aligned} U_0^5 &= \frac{25}{2}J, \quad \bar{b}_3 = -\frac{5}{3}\bar{\Phi}_3, \\ \bar{b}_6 &= -\frac{11}{17}\bar{\Phi}_6 + \frac{523}{1600}\bar{b}_3^2. \end{aligned} \quad (73)$$

В плоском случае имеем то же значение U_0 и следующие коэффициенты разложения функции h_2 :

$$\bar{b}_3 = -\frac{10}{3}\bar{\Phi}_3, \quad \bar{b}_6 = -\frac{22}{17}\bar{\Phi}_6 + \frac{747}{2720}\bar{b}_3^2. \quad (74)$$

Кривизна κ_{10} и ее вторая производная на оси связаны с величинами $\bar{b}_3, \bar{b}_{3,22}$ соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{b}_3 &= -\frac{5}{3}a_0\kappa_{10}, \\ \bar{b}_{3,22} &= -\frac{5}{3}a_0\kappa_{10,22} - \frac{1}{5}\bar{b}_3\bar{J}_{,22}. \end{aligned} \quad (75)$$

Информация (75) достаточна для интегрирования уравнений первого и второго приближений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вариант осесимметричных электронно-оптических систем с экранированным от магнитного поля катодом часто встречается в мощных приборах СВЧ нерелятивистского диапазона и электронных пушках различного технологического назначения. В последние десятилетия широкое применение получило использование ленточных пучков эллиптического или близкого к прямоугольному сечения, теоретические модели для которых складываются из расчета двумерного ленточного потока и учета торцевых эффектов [10].

Приближенные модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, правильно учитывают поведение решения вблизи сингулярных эмитирующих поверхностей с неоднородным токоотбором, а теоретические построения в лапласовской области вблизи кромки катода

(профилированный тепловой зазор) помогают избавиться от волонтаризма, принятого в программах траекторного анализа и состоящего в постулировании в этой области электрического поля, не являющегося решением уравнений пучка при принятом режиме термоэмиссии [11]. Для разномасштабных задач, к которым относится расчет пучков с высокой компрессией или с сильно вытянутым прямоугольным сечением, подобный способ действий приводит к ошибке, которая не может быть оценена в рамках действующей численной модели и которую необходимо компенсировать за счет экспериментальной доводки прибора.

Работа [12], основанная на теоретической модели упомянутого типа, демонстрирует пример расчета пучка с эллиптическим сечением при линейной компрессии порядка 30, берущего начало с цилиндрической эмитирующей поверхности в р-режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. Syrovoy V.A. Theory of Intense Beams of Charged Particles. N.Y.: Elsevier, 2011.
3. Овчаров В.Т. // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
4. Овчаров В.Т., Пензяков В.В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 8. С. 1651.
5. Сыровой В.А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 6. С. 614.
6. Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 502.
7. Сыровой В.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 1. С. 82.
8. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
9. Сыровой В.А. // РЭ. 2022. Т. 67. № 6. С. 615.
10. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1115.
11. Акимов П.И., Никитин А.П., Сыровой В.А. // Электронная техника. Техника СВЧ. 2018. № 1. С. 32.
12. Акимов П.И., Гаврилин А.А., Никитин А.П. и др. // РЭ. 2018. Т. 63. № 11. С. 1303.