

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874;537.624

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ РАЗВИТИЯ КОЛЕБАНИЙ МАГНИТОСТРИКЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ

© 2023 г. А. П. Иванов^а, В. Г. Шавров^б, В. И. Щеглов^{б, *}

^аСыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина,
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация

^бИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: vshcheg@cplire.ru

Поступила в редакцию 29.03.2022 г.

После доработки 29.03.2022 г.

Принята к публикации 26.05.2022 г.

Представлено численное исследование запаздывания возбуждения колебаний магнитоотрицательного преобразователя в режиме умножения частоты на основе модели связанных осцилляторов. Выявлен нестационарный характер колебаний, возбуждаемых после скачка амплитуды. Явление интерпретировано на основе модели динамического потенциала. Выполнено численное исследование развития колебаний во времени, построены фазовые портреты колебаний. Установлен фракталоподобный характер нестационарных колебаний, проявляющийся в сохранении степени их хаотичности при изменении величины шага расчета по времени.

DOI: 10.31857/S003384942305008X, EDN: UHUWDM

ВВЕДЕНИЕ

Для физики нелинейных явлений значительный интерес представляют нестационарные колебания различной природы, имеющие характер детерминированного хаоса [1, 2]. Важную роль играет исследование нелинейных явлений в магнитной среде [3, 4], в том числе обладающей магнитоупругими свойствами [5–8]. В работе [9], посвященной возбуждению гиперзвука высокой мощности с помощью магнитоотрицательного преобразователя, предложена система из семи дифференциальных уравнений, три из которых соответствуют колебаниям намагнитченности и четыре — колебаниям упругого смещения. Сложность такой системы вынуждает искать пути более простого ее представления. Распространенным способом упрощенного моделирования нестационарных систем является использование ансамбля автоколебательных осцилляторов Ван-дер-Поля [10–12]. Следуя подобному пути, в работе [13] показана возможность сведения задачи о нелинейных магнитоупругих колебаниях к системе двух уравнений второго порядка, отражающей колебания двух связанных нелинейных осцилляторов — магнитного и упругого. В работе [14] выявлен эффект нестационарного запаздывания возбуждения колебаний в режиме умножения частоты. Там же приведена интерпретация обнаруженного

эффекта на основе модели динамического потенциала. Отмечен сильный разброс значений времени запаздывания при малых изменениях параметра нелинейной связи, имеющий фракталоподобный характер.

Целью настоящей работы является более подробное исследование фрактального характера запаздывания, а также структуры колебаний, возбужденных после запаздывания.

Более глубокая цель работы состоит в исследовании поведения нелинейной системы связанных уравнений второго порядка. Задача о магнитоотрицательном преобразователе, рассматриваемая в квадратичном приближении по намагнитченности, является первичным побудительным моментом, позволившим получить такую систему. Авторы полагают, что исследованная ими система вследствие своей простоты имеет достаточно общий характер, поэтому позволяют себе исследовать ее более подробно, в том числе выходя за рамки известных традиционных экспериментов по магнитоотрицательному преобразователю.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В основе настоящего рассмотрения будем считать задачу о возбуждении гиперзвуковых колебаний в схеме магнитоотрицательного преобразова-

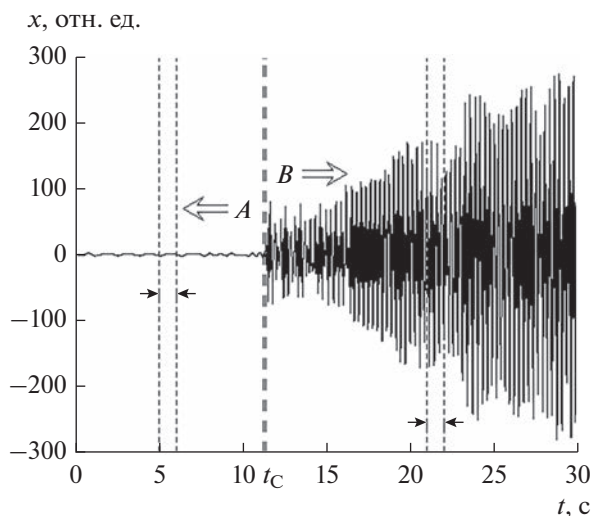


Рис. 1. Развитие колебаний первого осциллятора в областях A и B.

теля, использующей геометрию нормально намагниченной ферритовой пластины, обладающей магнитоупругими свойствами. Такая схема в сильно нелинейном режиме возбуждения подробно рассмотрена в работе [9]. Получена система из семи нелинейных уравнений первого порядка, отражающая связанные колебания двух систем — магнитной и упругой. В работе [13] показано, что с использованием квадратичного приближения по намагниченности приведенная в работе [9] система может быть сведена к значительно более простой системе из двух уравнений второго порядка, первое из которых, будучи нелинейным, относится к магнитной подсистеме, а второе, оставаясь линейным, — к упругой подсистеме. Установлено, что такая упрощенная система описывает нелинейные колебания связанной магнитоупругой системы вплоть до углов прецессии намагниченности порядка 50° и более. В данной работе будем исходить именно из такой упрощенной системы, описывающей связанные колебания двух осцилляторов — магнитного x и упругого y [13]:

$$\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + \omega_x^2 x + \gamma y + \eta x^2 y + \delta x^3 = A \cos(\omega_0 t), \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \beta_y \dot{y} + \omega_y^2 y + \gamma x = 0, \quad (2)$$

где x и y — нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения, β_x и β_y — параметры затухания той и другой компоненты, ω_x и ω_y — собственные частоты осцилляторов, γ и η — параметры их линейной и нелинейной связи, δ — параметр кубической нелинейности осциллятора x ; A и ω_0 — амплитуда и частота переменного поля.

Задача решается в условиях умножения частоты, так что собственная частота колебаний перво-

го осциллятора совпадает с частотой возбуждения, а второго превышает таковую в три раза. Выражения для параметров уравнений (1), (2) через реальные параметры материала приведены в работах [13, 14]. Здесь использовались нормированные значения: $\omega_x = 5$, $\omega_y = 15$, $\beta_x = 1$, $\beta_y = 0.1$, $\gamma = 10$, $\delta = 5$, $\eta = -200$, $A = 50$, $\omega_0 = 5$.

В работе [14] показано, что в приведенных условиях при достаточно высоком уровне переменного поля, после его включения возбуждение колебаний происходит в два этапа: сначала возбуждаются малоамплитудные колебания, синхронные с переменным полем, после чего с определенным запаздыванием, резким скачком происходит возбуждение высокоамплитудных колебаний, имеющих ярко выраженный хаотический характер. Механизм образования задержки интерпретирован на основе динамического потенциала [14]:

$$U = \omega_x^2 x^2 / 2 + \gamma_1 x y + \delta x^4 / 4 + \eta x^3 y / 3. \quad (3)$$

Динамический характер потенциала требует кратного синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов, так что задержка имеет место только в режиме умножения частоты.

2. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ

В данной работе система уравнений (1), (2) решалась численно методом Рунге—Кутты четвертого порядка. Было рассмотрено развитие колебаний во времени начиная с момента включения возбуждения. Общий характер колебаний иллюстрируется рис. 1.

На рисунке четко выявлены две области A и B, граница по времени между которыми обозначена как t_c . При $t < t_c$ (область A) колебания имеют регулярный характер, причем амплитуда их весьма мала (около 1...2 отн. ед). Начиная с момента времени t_c , т.е. при $t > t_c$ (область B) амплитуда колебаний резко возрастает более чем на два порядка (до 100 ед. и выше), причем их характер становится хаотическим.

3. ВАРИИРОВАНИЕ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ

Для более подробного выявления характера колебаний в обеих областях выполнялось варьирование шага по времени Δt . Общим свойством колебаний, не зависящим от величины шага, являлось скачкообразное увеличение их амплитуды, запаздывающее на время t_c относительно начала возбуждения. В области A колебания являлись почти регулярными с небольшой примесью третьей и пятой гармоник. Уменьшение шага, начиная с величины 0.01 ед. времени, к изменению формы колебаний не приводило. То есть вплоть до шага 10^{-7} с, что было на семь порядков меньше

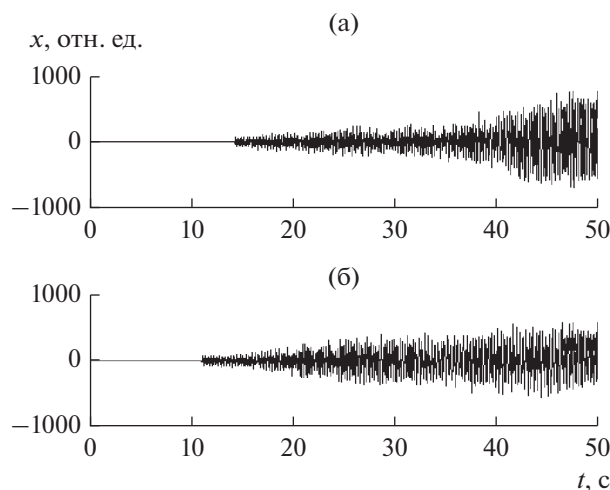


Рис. 2. Развитие колебаний осциллятора x после включения возбуждения при различной величине шага по времени: $\Delta t = 10^{-4}$ с (а) и 10^{-5} с (б).

периода возбуждения, равного 1.25, какие-либо изменения характера колебаний полностью отсутствовали. Не так, однако, обстояло дело в области B , где амплитуда при времени t_c скачком увеличивалась на два-три порядка относительно амплитуды в области A . Здесь форма колебаний при изменении шага менялась весьма сильно. Изменение являлось существенным во всем диапазоне исследованных шагов, вплоть до 10^{-7} с, что на семь порядков меньше периода возбуждения.

Общий характер колебаний рассматриваемой системы иллюстрируется следующими далее рисунками. На рис. 2 показано развитие колебаний осциллятора после включения возбуждения при различной величине шага по времени.

Из рис. 2 видно, что до определенного момента времени амплитуда колебаний крайне мала, что соответствует запаздыванию их развития. При $\Delta t = 10^{-4}$ с и 10^{-5} с время запаздывания составляет 14.42 и 11.02 с соответственно. Амплитуды колебаний до момента скачка от величины шага не зависят и составляют около 1.75 ± 0.0275 отн. ед. Амплитуды колебаний после скачка резко увеличиваются и при $\Delta t = 10^{-4}$ и 10^{-5} с равны соответственно 63.5 и 56.3 отн. ед. Дополнительная проверка показывает, что при $\Delta t = 10^{-6}$ с время запаздывания и амплитуда снова меняются, составляя 12.93 с и 68.5 отн. ед. соответственно. Таким образом, как по времени запаздывания, так и по амплитуде после скачка по мере уменьшения шага стабилизации не наблюдается. Из рис. 2 видно, что после скачка не только амплитуда, но и характер колебаний сильно меняется. Подробное рассмотрение показывает, что резкое изменение ха-

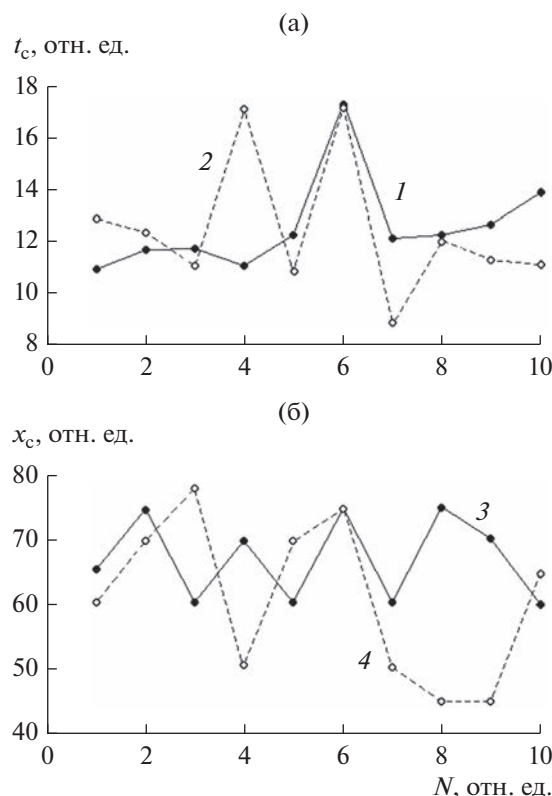


Рис. 3. Зависимости времени запаздывания (кривые 1 и 2) и амплитуды в момент скачка (3, 4) от коэффициента N , определяющего величину шага по времени, так что для кривых 1 и 3 шаг равен: $\Delta t = 10^{-5} N$ с, а для кривых 2 и 4 шаг равен $\Delta t = 10^{-6} N$ с.

рактера колебаний имеет место при изменении шага даже в пределах десятых долей процента в ту или другую сторону.

На рис. 3 приведены зависимости времени запаздывания и амплитуды колебаний в момент скачка от величины шага по времени.

Из рисунка видно, что при уменьшении величины шага на порядок (с 10^{-5} на 10^{-6} с) те и другие кривые не проявляют какой-либо тенденции к упорядочению, их скачкообразный характер остается прежним. Соединяющие точки ломаные линии не означают, что зависимости между соседними точками меняются плавно, а введены лишь для удобства рисунка. При уменьшении шага линии испытывают дополнительные изломы, амплитуда которых имеет тот же порядок, что и изломы, приведенные на рис. 3.

Тонкая структура колебаний в обеих областях на рис. 1 более подробно иллюстрируется рис. 4, где показаны развертки по времени на двух небольших, но достаточно характерных участках областей A и B (см. вертикальные пунктирные ли-

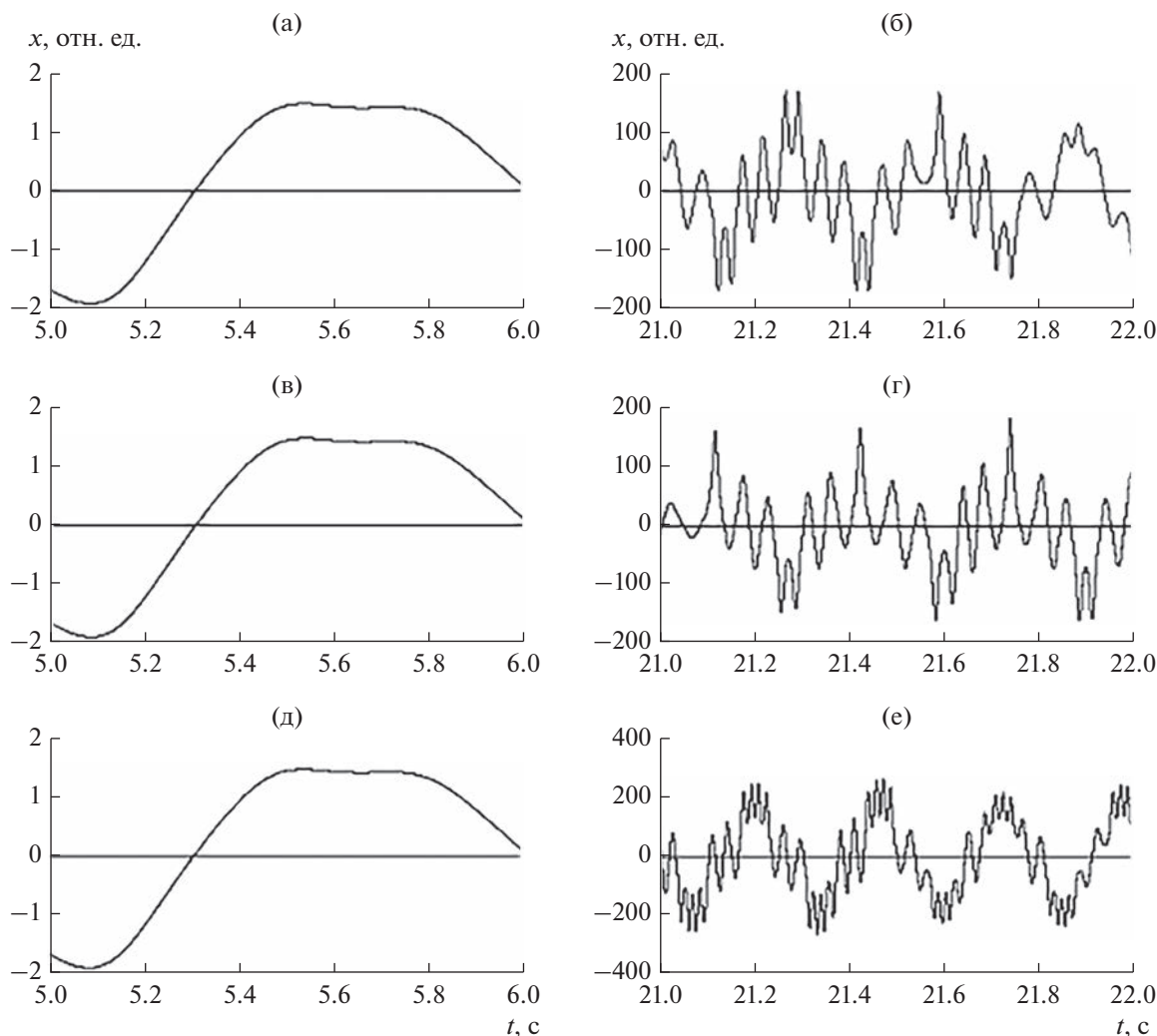


Рис. 4. Развертки колебаний в областях *A* (слева) и *B* (справа) при различных значениях шага по времени: $\Delta t = 10^{-3}$ (а, б), 10^{-4} (в, г) и 10^{-5} с (д, е); время запаздывания $t_c = 12$ (а, б), 14 (в, г) и 11 с (д, е), остальные параметры см. в тексте (разд. 1).

нии на рис. 1). Из рис. 4 видно, что в области *A* вид колебаний от величины шага никак не зависит, тогда как в области *B* общий вид колебаний при изменении шага заметно меняется. На рис. 4б и 4г полностью нарушен синхронизм колебаний, а на рис. 4е, кроме того, еще и увеличена амплитуда. Таким образом, видим, что в области *B* система крайне чувствительна к величине шага, вплоть до весьма малых его величин.

Общий характер колебаний в обеих областях не связан с изменением условий в начальный момент времени. Так, при варьировании начального смещения первого осциллятора в пределах нескольких единиц, вид колебаний в области *A* не менялся. В области *B* форма колебаний менялась, но общий их характер сохранялся. Можно полагать, что механизм подобного изменения формы колебаний в области *B* был связан с тем, что при

изменении длины шагов их распределение в области процесса нестационарного роста менялось, так что небольшое изменение возбуждения в этот момент приводило к сильному изменению дальнейших колебаний системы.

На рис. 5 приведены нормированные амплитудно-частотные спектры тех же колебаний, что приведены на рис. 4 при различной величине шага. Из рисунка видно, что в области *A* спектры колебаний от величины шага никак не зависят, тогда как в области *B* значительно отличаются друг от друга. Особенно разительно отличаются спектры рис. 5б и 5г. Так, на рис. 5б спектр по частоте меняется плавно, а на рис. 5г резко выделяется линия на частоте около $\omega = 0.2$ отн. ед., тогда как амплитуды на других частотах за счет большой величины этого пика относительно подавлены. На рис. 5е эта линия вблизи $\omega = 0.2$ отн. ед. развилась

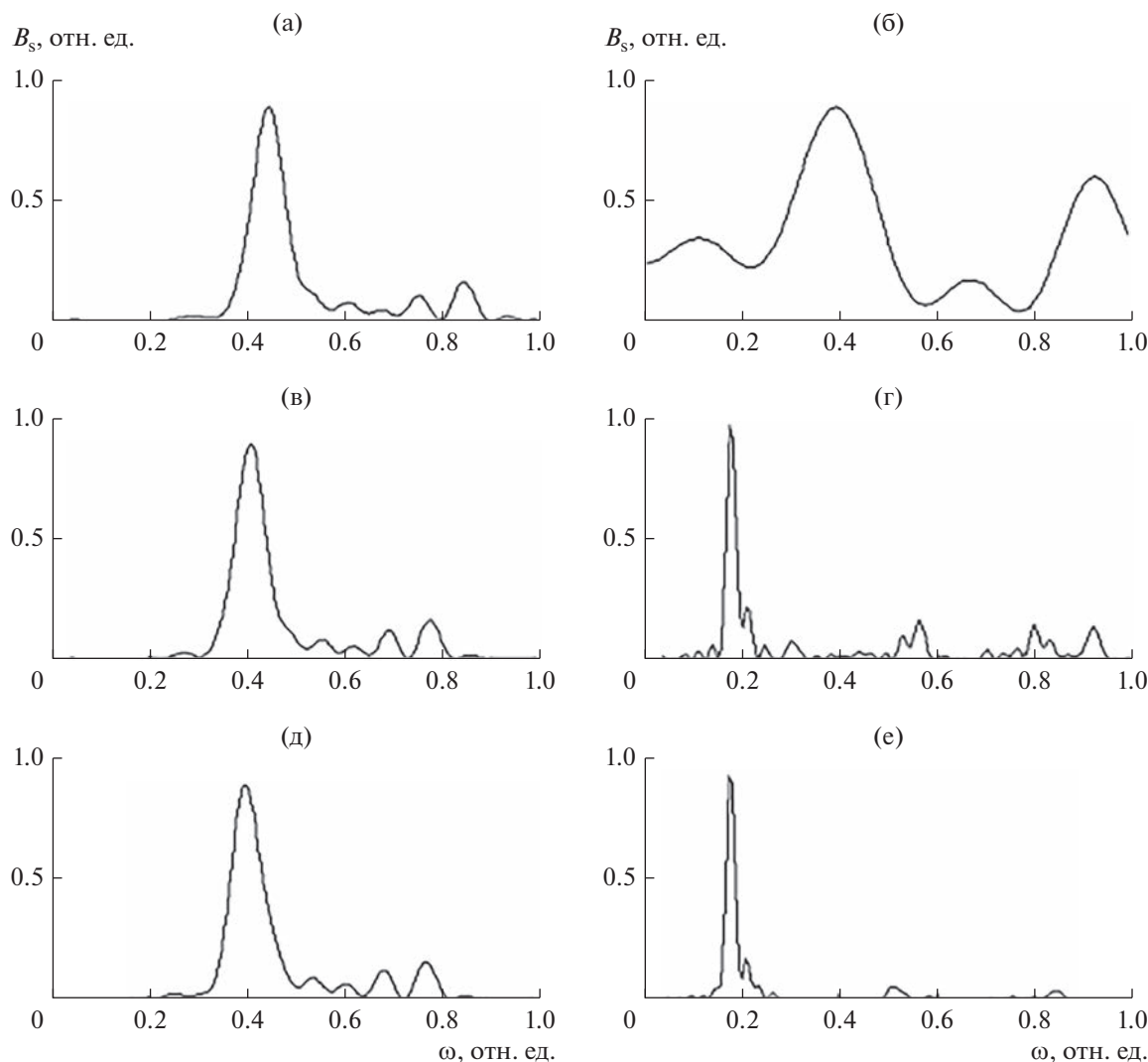


Рис. 5. Спектры колебаний (см. рис. 4) в областях *A* (слева) и *B* (справа) при различных значениях шага по времени: $\Delta t = 10^{-3}$ (а, б), 10^{-4} (в, г) и 10^{-5} (д, е); интервалы по времени несколько расширены по сравнению с рис. 4: с 5 до 10 с (слева) и с 24.0 до 25.0 с (справа).

настолько, что подавила все линии на более высоких частотах.

Таким образом, можно видеть, что уменьшение шага Δt в пределах с 10^{-3} с до 10^{-5} с на спектрах колебаний в области *A* никак не сказывается, тогда как в области *B* меняет спектры весьма существенным образом без проявления какой-либо тенденции к стабилизации.

Замечание. Для исключения ошибки численного счета при развитии высокоамплитудных колебаний, проверялось развитие колебаний в отсутствие умножения частоты, когда амплитуда колебаний имела тот же порядок (около 3009 отн. ед.), но эффект запаздывания отсутствовал, т.е. колебания начинали развиваться сразу после включения возбуждения со временем установления, определя-

емом временем релаксации обеих колебательных систем. Было установлено, что в исследованном интервале времени, т.е. до 50 с какая-либо зависимость структуры колебаний от величины шага полностью отсутствовала. Дополнительная проверка результатов производилась с независимым использованием двух машинных языков высокого уровня – Fortran и C++, причем общий характер результатов сохранялся одинаковым. В качестве основной схемы интегрирования использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Некоторые результаты были проверены с использованием метода Рунге–Кутты шестого порядка. Общий характер результатов также сохранялся. Применение метода Эйлера, как имеющего большую погрешность, было признано нецелесообразным, так как амплитуда колебаний еще до момента скачка (т.е.

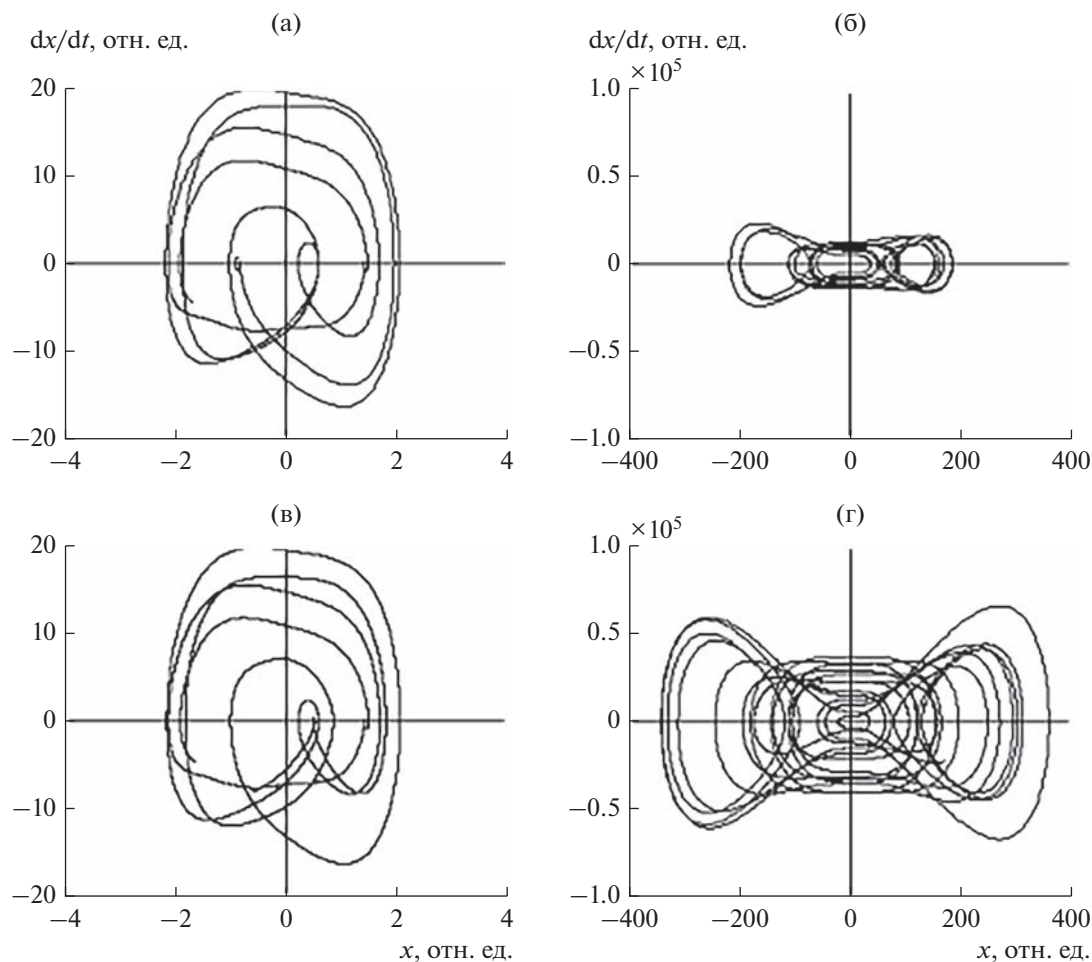


Рис. 6. Фазовые портреты колебаний в областях *A* (слева) и *B* (справа) при различных значениях шага по времени: $\Delta t = 10^{-4}$ (а, б) и 10^{-5} с (в, г); время запаздывания $t_c = 14$ (а, б) и 11 с (в, г).

по рис. 4 до времени 11 с) постепенно увеличивалась плавным образом и четкое выделение скачка становилось затруднительным. Таким образом, с достаточной уверенностью можно полагать, что наблюдаемое в режиме умножения частоты изменение структуры колебаний при изменении шага не связано с ошибками численного счета.

4. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КОЛЕБАНИЙ В ОБЕИХ ОБЛАСТЯХ

На рис. 6 приведены фазовые портреты колебаний первого осциллятора x в областях *A* и *B* при различных значениях шага по времени Δt . Фазовые портреты второго осциллятора y ведут себя аналогичным образом, поэтому здесь не рассматриваются.

Сравнивая масштаб по осям в левом и правом столбцах рис. 6, можно видеть, что фазовая траектория до момента $t = t_c$, т.е. в области *A*, сосредоточена в малой окрестности нуля, а после этого мо-

мента, т.е. в области *B*, резко увеличивается, приобретая размах на три-четыре порядка больший.

Портреты в обоих случаях сильно хаотизируются, особенно при времени, большем t_c , что отражает хаотический характер разверток, приведенных на рис. 2.

Как видим, портреты в области *A* при изменении шага не меняются, тогда как в области *B* при таком же изменении шага меняются кардинальным образом как по структуре траекторий, так и по их размаху.

Таким образом, здесь, как и в предыдущих случаях, уменьшение шага в области *A* не меняет структуры портретов, тогда как в области *B* меняет существенным образом, не проявляя тенденции к стабилизации. Контрольная проверка при времени развертки до 400 с показала, что хаотический характер колебаний сохраняется, какой-либо стабилизации не наблюдается, а фазовые портреты при длительном развитии обнаруживают сплошное замазывание траекторий.

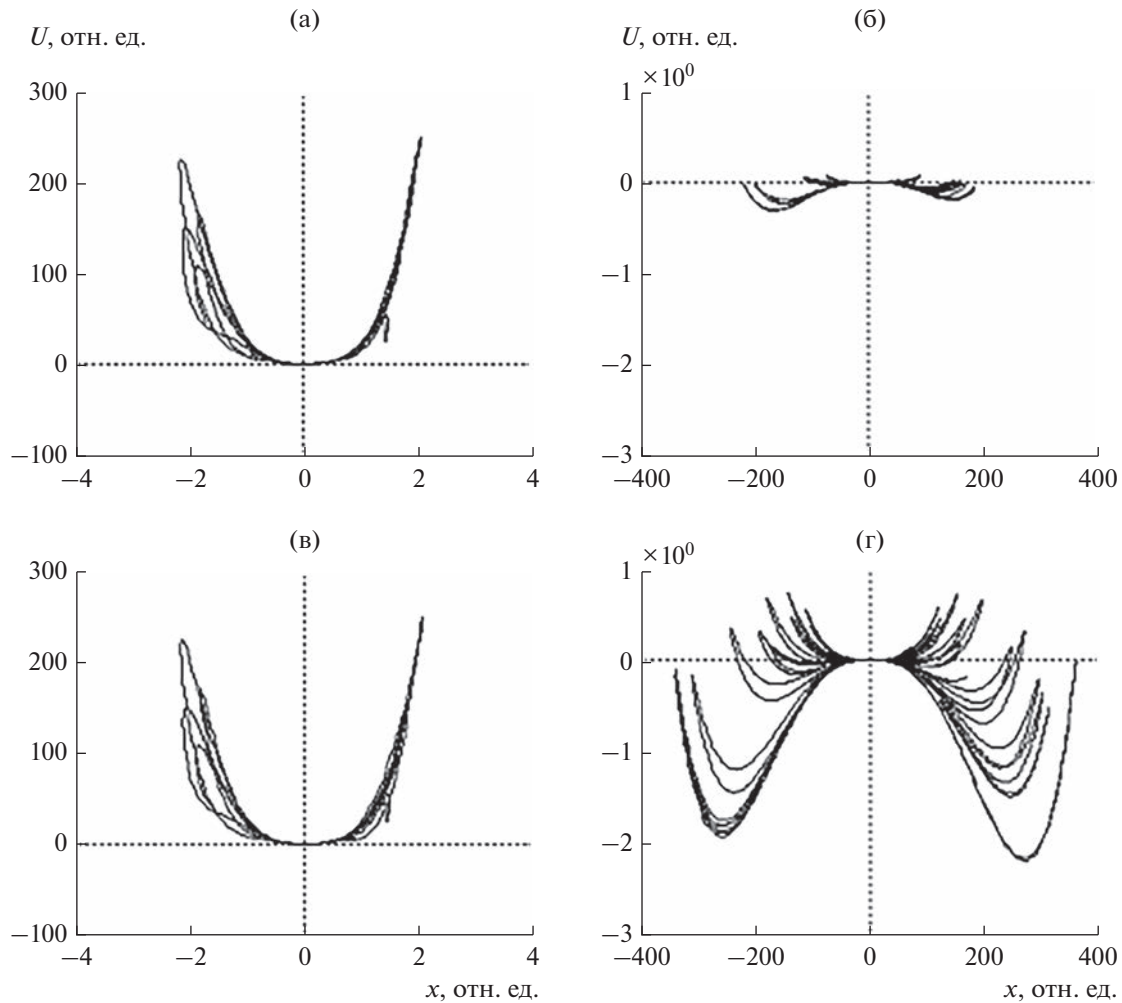


Рис. 7. Динамические потенциалы колебаний в областях *A* (слева) и *B* (справа) при различных значениях шага по времени: $\Delta t = 10^{-4}$ (а, б) и 10^{-5} с (в, г); время запаздывания $t_c = 14$ (а, б) и 11 с (в, г).

5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ КОЛЕБАНИЙ В ОБЕИХ ОБЛАСТЯХ

На рис. 7 представлены динамические потенциалы колебаний первого осциллятора x в областях *A* и *B* при различных значениях шага по времени Δt . Построение выполнено по формуле (3).

Из сравнения масштабов в левом и правом столбцах можно видеть, что потенциал до момента $t = t_c$, т.е. в области *A*, имеет малый размах и малую амплитуду, а после этого момента, т.е. в области *B*, подобно траектории фазового портрета, резко расширяется, приобретая размах на три-четыре порядка больший.

Потенциал в области *A*, имеет вид, подобный квадратичной параболе, что обусловлено малостью размаха колебаний. При этом изменение шага потенциал никак не меняет.

В области *B*, потенциал ведет себя существенно отличным образом. Он имеет широкий вид с

двумя симметричными минимумами по обе стороны, соответствующий четвертой степени координаты. Потенциальные траектории от периода к периоду меняются хаотическим образом, заметая широкую площадь. Такое хаотическое изменение потенциала в процессе колебаний соответствует его динамическому характеру, так как в каждый момент времени потенциал не остается постоянным, а меняется в соответствии с изменением величины смещения осциллятора y .

Уменьшение шага развертки по времени (с 10^{-4} на 10^{-5} с) не приводит к стабилизации, более того, на рис. 7г потенциал имеет значительно более сложный вид, чем на рис. 7б. Проверка показывает, что дальнейшее уменьшение шага, вплоть до 10^{-6} с, также к стабилизации не приводит, причем амплитуда потенциала при малом изменении шага меняется значительным образом, не менее чем

в два-три раза. Малый размах потенциала на рис. 7б по сравнению с таковым на рис. 7г не является общим явлением относительно уменьшения шага, а просто соответствует выбранному диапазону развертки по времени. В самом деле, из сравнения двух разверток, приведенных на рис. 2, соответствующих шагам 10^{-4} с (рис. 2а) и 10^{-5} с (рис. 2б), можно видеть, что в интервале времени от 25 до 30 с при уменьшении шага амплитуда увеличивается, тогда как в интервале времени от 45 до 50 с при таком же изменении шага амплитуда уменьшается.

Таким образом, здесь, как и в предыдущих случаях, уменьшение шага в области *A* структуры потенциалов не меняет, тогда как в области *B* меняет существенным образом, не проявляя тенденции к стабилизации.

6. НЕКОТОРЫЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, не прекращающееся изменение структуры колебаний с сохранением их подобия (в данном случае — разнообразия) при безграничном уменьшении масштабной единицы можно считать проявлением фрактального характера исследуемого явления, подобного фрактальному характеру приведенного в работе [15, с. 46] примера, касающегося длины береговой линии Британии. Согласно этому примеру фрактальный характер береговой линии проявляется в том, что при увеличении масштаба карты, т.е. при уменьшении протяженности рассматриваемого участка, извилистый характер береговой линии сохраняется примерно в одинаковой степени (разумеется, до определенного предела, задаваемого, например, атомными размерами). В настоящей работе уменьшение шага, т.е. более подробное рассмотрение все уменьшающегося промежутка времени, также оставляет хаотический характер колебаний тем же самым. Такое сохранение “извилистости” процесса также позволяет говорить о его фрактальном характере. Целью настоящего рассмотрения являлось выявление фрактального характера явления как такового, при этом вопросу об определении фрактальной размерности нестационарного запаздывания авторы предполагают посвятить отдельную работу.

Следует отметить, что приведенная здесь система (1), (2) является отражением реального физического процесса — возбуждения магнитоупругих колебаний в схеме магнотриксционного преобразователя. Естественно полагать, что реальный преобразователь “не знает” о величине шага, с которым решается система (1), (2). Таким образом, приведенные здесь положения касаются не реального процесса, а способа его моделирования с помощью системы (1), (2). То есть фрактальный характер имеет не магнотриксционный преоб-

разователь как таковой, а именно математическая модель его колебаний. Таким образом, затруднительно буквально моделировать развитие колебаний во времени, однако вполне можно полагаться на моделирование самого факта запаздывания, а также на вполне реалистичные оценки величины времени запаздывания, амплитуды, фазового портрета и динамического потенциала развивающихся колебаний. В этом плане было бы интересным выполнить статистический анализ получаемых оценок, чтобы выявить наиболее вероятные их доверительные интервалы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено возбуждение нелинейных магнитоупругих колебаний на основе модельной системы из двух уравнений второго порядка, отражающих колебания двух связанных осцилляторов — магнитного и упругого. В режиме умножения частоты выявлено возбуждение хаотических колебаний высокой амплитуды, происходящее со значительной задержкой во времени относительно момента включения возбуждения. В качестве параметра вариации модели принят шаг расчета по времени. Показано, что в течение времени запаздывания характер колебаний от степени уменьшения длительности шага не зависит, а с момента развития высокоамплитудных колебаний форма колебаний, в целом оставаясь хаотической, сильно меняется, вплоть до шага, на семь порядков меньшего периода возбуждения. Рассмотрение фазового портрета и динамического потенциала выявило для этих параметров аналогичные свойства — независимость от длительности шага до момента запаздывания и резкое изменение в области развития высокоамплитудных колебаний. Наблюдаемое изменение вида колебаний при общем сохранении их хаотичности в процессе многократного уменьшения интервала наблюдения (т.е. шага расчета) принято в качестве свидетельства фракталоподобного характера моделирования явления нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит, 2001.

3. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.
4. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
5. Comstock R.L., Le Craw R.C. // J. Appl. Phys. 1963. V. 34. № 10. P. 3022.
6. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Физическая акустика. Т. 3Б. Динамика решетки / Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1968. С. 156.
7. Schlömann E., Joseph R.I. // J. Appl. Phys. 1964. V. 35. № 8. P. 2382.
8. Полулях С.Н., Бержанский В.Н., Семук Е.Ю. и др. // ЖТФ. 2021. Т. 21. № 7. С. 1124.
9. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // РЭ. 2009. Т. 54. № 7. С. 863.
10. Станкевич Н.В., Астахов О.В., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. № 10. С. 46.
11. Станкевич Н.В., Попова Е.С., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. № 24. С. 17.
12. Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V. // Phys. Lett. A. 2013. V. 377. P. 3291.
13. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектроники. 2014. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
14. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // Журн. радиоэлектроники. 2017. № 8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.
15. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Наука, 2004.