РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2023, том 68, № 3, с. 271–278

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391.2

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПОМЕХ ТРАНСФОРМИРУЮЩЕГО ТИПА СО СТИРАНИЕМ

 В. В. Климов*

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, пл. Введенского, 1, Фрязино Московской обл., 141190 Российская Федерация

**E-mail: klimov47@list.ru*

Поступила в редакцию 03.04.2022 г.
После доработки 03.04.2022 г.
Принята к публикации 18.04.2022 г.

Рассмотрена задача идентификации двух источников бинарных сигналов на фоне помех трансформирующего типа со стиранием в условиях противодействия. Ситуация описывается антагонистической игрой, аналитическое решение которой дает оптимальные стратегии игроков и цену игры как функцию априорной вероятности появления одного из источников. Рассмотрены частные случаи.

DOI: 10.31857/S0033849423020092, **EDN:** LCIWOI

ВВЕДЕНИЕ

Исследование окружающей среды дистанционными методами требует разработки математических моделей и методов принятия оптимальных решений в условиях априорной неопределенности [1–4]. В таких ситуациях для получения гарантированного результата приходится рассматривать внешнюю среду как активного игрока, настроенного антагонистически. Данная работа и посвящена исследованию такой ситуации. Подобная постановка задачи актуальна, например, в мониторинге воздушного пространства.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется два источника S_1 и S_2 бинарных сигналов. Каждый из источников может посылать два различных сигнала m_1 и m_2, причем на каждом следующем один за другим интервале времени происходит включение источников в канал связи случайным образом.

Вероятность включения источника S_1 равна P, а источника S_2 – $(1-P)$. Сигналы поступают в систему наблюдения по каналу без памяти при действии нейтральных помех трансформирующего типа и помех стирания, где под помехой стирания понимается появление сигнала m_3, отличного от m_1 и m_2. Вероятность трансформации сигнала m_1 в m_2 или сигнала m_2 в m_1 равна P_0, а вероятность стирания – S. При этом предполагается, что вероятность искажения сигнала не превосходит 1/2, т.е. выполняется неравенство

$$P_0 + S \le 1/2. \qquad (1)$$

На выходе канала связи имеется система наблюдения, в задачу которой входит обработка поступающих сигналов по определенному правилу и вынесение решения о наличии в данном дискретном интервале времени источника либо S_1, либо S_2. По условию задачи система наблюдения знает, какой из сигналов (m_1 или m_2) на данном интервале времени источник S_1 должен посылать. Тем не менее это не исключает ошибок при вынесении решений. Действительно, система наблюдения не знает, какой из источников был включен в канал связи; второй причиной ошибок является наличие помех трансформирующего типа и помех стирания.

Показателем качества работы системы наблюдения принимается средний выигрыш. Предполагается, что система наблюдения не имеет информации о том, какой из сигналов посылает источник S_2, более того, источник S_2 ведет себя наихудшим образом с точки зрения системы наблюдения. Таким образом, данную ситуацию можно описать антагонистической игрой, в которой первым игроком является система наблюдения в коалиции с источником S_1, вторым игроком является источник S_2.

Пусть a – выигрыш системы наблюдения за правильное решение, b – за неверное решение, причем $a \ge b \ge 0$.

Первый игрок стремится увеличить свой средний выигрыш; второй игрок стремится уменьшить средний выигрыш. Схема взаимодействия источников сигналов и системы наблюдения представлена на рис. 2.

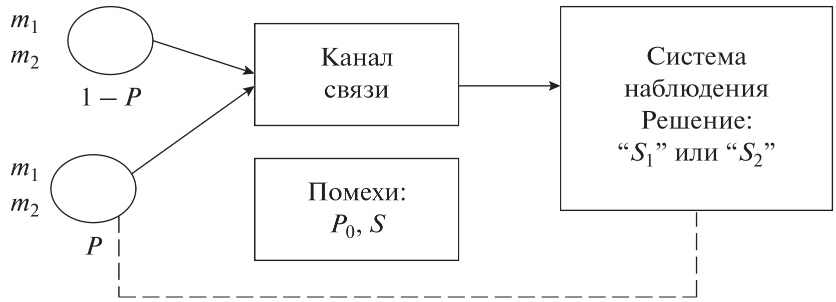

Рис. 1. Взаимодействие источников сигналов и системы наблюдения.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА

Опишем теперь множество чистых стратегий игроков. Источник S_2 может посылать один из двух сигналом m_1 или m_2. Таким образом, у второго игрока имеется только две чистых стратегий. Чистыми стратегиями первого игрока являются решающие функции. Выпишем все чистые стратегии:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= [m_1 : m_2m_3/m_1],\\
\mathbf{I}_2 &= [m_2 : m_1m_3/m_1],\\
\mathbf{I}_3 &= [m_2m_3 : m_1/m_1],\\
\mathbf{I}_4 &= [m_1m_3 : m_2/m_1],\\
\mathbf{I}_5 &= [m_1 : m_2m_3/m_2],\\
\mathbf{I}_6 &= [m_2 : m_1m_3/m_2],\\
\mathbf{I}_7 &= [m_2m_3 : m_1/m_2],\\
\mathbf{I}_8 &= [m_1m_3 : m_2/m_2],\\
\mathbf{I}_9 &= [m_3 : m_1m_2/m_1],\\
\mathbf{I}_{10} &= [m_1m_2 : m_3/m_1],\\
\mathbf{I}_{11} &= [S_1],\\
\mathbf{I}_{12} &= [S_2],\\
\mathbf{I}_{13} &= [m_3 : m_1m_2/m_2],\\
\mathbf{I}_{14} &= [m_1m_2 : m_3/m_2],
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$\mathbf{I} = \{I_i^j\}, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 14, \tag{3}$$

где элементы I_i^j матрицы $\mathbf{I}$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
I_1^1 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
&\quad + b[P(P_0 + S)(1 - P)P_0],\\
I_2^1 &= a[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
&\quad + b[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)],\\
I_3^1 &= a[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0] + \\
&\quad + b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)],\\
I_4^1 &= a[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
&\quad + b[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)],\\
I_5^1 &= a[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
&\quad + b[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0],\\
I_6^1 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
&\quad + b[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)],\\
I_7^1 &= a[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0] + \\
&\quad + b[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)],\\
I_8^1 &= a[P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
&\quad + b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)],\\
I_9^1 &= a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
&\quad + b[P(1 - S) + (1 - P)S],\\
I_{10}^1 &= a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
&\quad + b[PS + (1 - P)(1 - S)],\\
I_{11}^1 &= aP + b(1 - P),\\
I_{12}^1 &= a(1 - P) + bP,\\
I_{13}^1 &= a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
&\quad + b[P(1 - S) + (1 - P)S],\\
I_{14}^1 &= a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
&\quad + b[PS + (1 - P)(1 - S)].
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Отметим, что

$$I_{13}^1 = I_9^1, \quad I_{14}^1 = I_{10}^1.$$

Элементы I_i^2 матрицы $\mathbf{I}$ имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
I_1^2 &= a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
&\quad + b[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)],\\
I_2^2 &= a[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
&\quad + b[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
I_3^2 = a[P(P_0 + S) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
+ b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(P_0 + S)], \\
I_4^2 = a[P(1 - P_0) + (1 - P)P_0] + \\
+ b[PP_0 + (1 - P)(1 - P_0)], \\
I_5^2 = a[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)] + \\
+ b[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)], \\
I_6^2 = a[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)] + \\
+ b[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0], \\
I_7^2 = a[P(1 - P_0) + (1 - P)(1 - P_0 - S)] + \\
+ b[PP_0 + (1 - P)(P_0 + S)], \\
I_8^2 = a[P(P_0 + S) + (1 - P)P_0] + \\
+ b[P(1 - P_0 - S) + (1 - P)(1 - P_0)], \\
I_9^2 = a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
+ b[P(1 - S) + (1 - P)S], \\
I_{10}^2 = a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
+ b[PS + (1 - P)(1 - S)], \\
I_{11}^2 = aP + b(1 - P), \\
I_{12}^2 = a(1 - P) + bP, \\
I_{13}^2 = a[PS + (1 - P)(1 - S)] + \\
+ b[P(1 - S) + (1 - P)S], \\
I_{14}^2 = a[P(1 - S) + (1 - P)S] + \\
+ b[PS + (1 - P)(1 - S)].
\end{gathered} \tag{5}
$$

Отметим, что, как и в случае I_i^1, выполняется

$$I_{13}^2 = I_9^2, \quad I_{14}^2 = I_{10}^2.$$

Таким образом, стратегии $\mathbf{I}_{13}$ и $\mathbf{I}_{14}$ можно опустить.

Рассмотрим случай, когда включение источника S_1 в канал связи достаточно маловероятно, т.е. пусть $P \le 1/2$.

Исследуем матрицу с элементами I_i^j на наличие в ней доминируемых стратегий, учитывая соотношение

$$P_0 + S \le 1/2. \tag{6}$$

Сравнивая строки матрицы I_i^j, получим

$$
\begin{gathered}
I_1^j \ge I_4^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_2^j \ge I_3^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_5^j \ge I_8^j \text{ при } j = 1,2; \\
I_6^j \ge I_7^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_9^j \ge I_{10}^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_{12}^j \ge I_{11}^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_1^j \ge I_5^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_6^j \ge I_2^j \text{ при } j = 1,2, \\
I_{12}^j \ge I_9^j \text{ при } j = 1,2.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Вычеркивая четвертую, третью, восьмую, седьмую, десятую, одиннадцатую, пятую, вторую, девятую стратегию (строку), получим в итоге три стратегии, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_6$, $\mathbf{I}_{12}$.

Таким образом, задача сводится к решению игры $\mathbf{I}$ размером (3×2), где матрица $\mathbf{I}$ им примет вид

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_6 \\ \mathbf{I}_{12} \end{array} \left\| \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \\ A & B \\ B & A \\ E & E \end{array} \right\|, \tag{8}$$

где

$$
\begin{gathered}
A = a(1 - P_0 - PS) + b(P_0 + PS), \\
B = a(P + P_0 + S - 2PP_0 - 2PS) + \\
+ b(1 - P_0 - P - S + 2PP_0 + 2PS), \\
E = a(1 - P) + bP.
\end{gathered}
$$

Будем решать полученную игру графическим методом.

Пусть y – вероятность выбора вторым игроком первой стратегии, $(1 - y)$ – вероятность выбора вторым игроком второй стратегии, а Z_i – выигрыш первого игрока при выборе им i-й чистой стратегии.

Очевидно,

$i = 1$, когда выбрана стратегия $\mathbf{I}_1$;

$i = 2$, когда выбрана стратегия $\mathbf{I}_6$;

$i = 3$, когда выбрана стратегия $\mathbf{I}_{12}$.

Имеем

$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} y & 1 - y \\ A & B \\ B & A \\ E & E \end{array} \right\|, \tag{9}$$

где

$$
\begin{gathered}
Z_1 = Ay + B(1 - y), \\
Z_2 = By + A(1 - y), \\
Z_3 = E.
\end{gathered}
$$

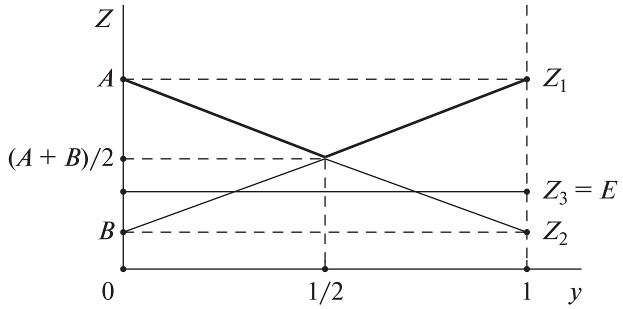

Рис. 2. Выигрыш первого игрока при $P \geq P_1$.

Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} Z_1 = (A - B)\,y + B, \\ Z_2 = (B - A)\,y + A, \\ Z_3 = E. \end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} A - B = (a - b)(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq \\ \geq (a - b)\,(1 - P)(1 - 2P_0 - S) \geq 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, получили соотношение $A \geq B$, которое понадобится нам в графическом методе. Рассмотрим два случая, которые соответствуют разным частям диапазона изменения параметра $P \in [0, 1/2]$.

I случай:

$$\begin{gathered} E \leq (A + B)/2, \text{ т.е.} \\ P \geq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \end{gathered}$$

Выигрыш первого игрока при $P \geq P_1$ представлен на рис. 2.

Из курса по теории игр [5] известно, что

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y). \tag{12}$$

На рис. 2 жирной линией представлен график функции

$$Z = \max_{i=1,3} Z_i(y), \tag{13}$$

Как следует из рис. 2, минимальное значение этой функции достигается при $y = 1/2$ и равно $(A + B)/2$.

Таким образом, цена игры равна

$$v = (A + B)/2. \tag{14}$$

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$\begin{gathered} y_1^* = 1/2, \\ y_2^* = 1/2. \end{gathered} \tag{15}$$

Оптимальная стратегия первого игрока находится в результате решения уравнения

$$xA + (1 - x)B = xB + (1 - x)\,A. \tag{16}$$

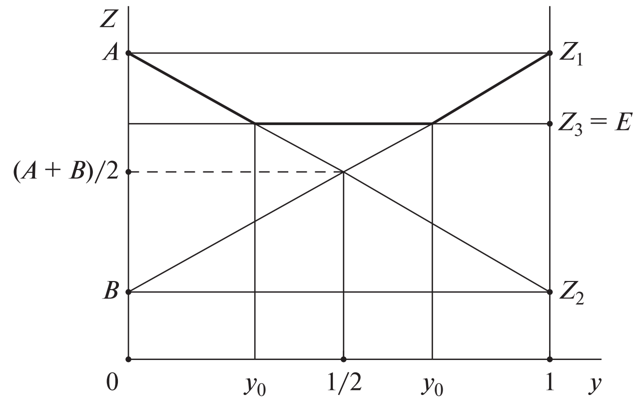

Рис. 3. Выигрыш первого игрока при $P \leq P_1$.

Итак, решая это уравнение относительно x, получим

$$\begin{gathered} x_1^* = 1/2, \\ x_6^* = 1/2. \\ x_{12}^* = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

По определению переменных имеем

$$A - E = (a - b)(P - P_0 - PS)\,, \tag{18}$$

$$B - E = (a - b)(2P + P_0 + S - 2PP_0 - 2PS - 1). \tag{19}$$

По предположению случая I имеем

$$E \leq (A + B)/2. \tag{20}$$

Это неравенство эквивалентно другому неравенству

$$A - E \geq E - B, \tag{21}$$

из которого следует

$$P \geq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \tag{22}$$

Цена игры как функция входящих параметров имеет вид

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P + S - 2PP_0 - 3PS)/2. \tag{23}$$

Перейдем к оставшейся части диапазона параметра P.

II случай:

$$\begin{gathered} E \geq (A + B)/2, \text{ т.е.} \\ P \leq P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \end{gathered}$$

Выигрыш первого игрока при $P \leq P_1$ представлен на рис. 3.

Как это следует из теории игр [5], цена игры

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 3 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y), \tag{24}$$

Очевидно, минимум этой функции достигается на $[y_0, y^0]$.

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$y_1^* \in [y_0, y^0], \quad (25)$$

$$y_2^* = 1 - y_1^*. \quad (26)$$

Из требования $E \le A$ следует, что

$$P \ge P_0/(1 - S) = P_{0S}. \quad (27)$$

Границы диапазона находятся решением уравнений

$$\begin{aligned} y_0 &= (E - A)/(B - A) = (A - E)/(A - B) = \\ &= (P - P_0 - PS)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S). \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} y^0 &= (E - B)/(A - B) = (1 - 2P - P_0 - S + 2PP_0 + 2PS)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S) = \\ &= (1 - 2P)(1 - S - P_0)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S). \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнивая значения y_0 и y^0, легко заметить, что эти значения симметричны относительно точки $y = 1/2$, т.е.

$$y^0 = 1 - y_0. \quad (30)$$

Из предложения случая II следует, что

$$E \ge (A + B)/2, \quad (31)$$

из которого следует, что

$$A - E \le E - B \quad (32)$$

и это приводит к неравенству

$$P \le P_1 = (1 - S)/(3 - 3S - 2P_0). \quad (33)$$

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0, \\ x_6^* &= 0. \\ x_{12}^* &= 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Цена игры в этом случае равна

$$v = E = a(1 - P) + bP. \quad (35)$$

Итак, оптимальная стратегия системы наблюдения при условии

$$x^* = I_{12} = [S_2]. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь случай, когда включение источника S_1 в канал связи достаточно вероятно, т.е. пусть выполняется соотношение

$$P \ge 1/2.$$

Исследуем матрицу **I** на наличие в ней доминируемых стратегий, учитывая соотношение

$$P_0 + S \le 1/2. \quad (37)$$

Сравнивая элементы строк матрицы **I**, получим

$$\begin{aligned} &I_1^j \ge I_3^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_6^j \ge I_8^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_4^j \ge I_2^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_7^j \ge I_5^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_{11}^j \ge I_{12}^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_{10}^j \ge I_9^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_4^j \ge I_1^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_7^j \ge I_6^j \text{ при } j = 1,2; \\ &I_{11}^j \ge I_{10}^j \text{ при } j = 1,2. \end{aligned} \quad (38)$$

Вычеркивая третью, восьмую, вторую, пятую, двенадцатую, девятую, первую, шестую, десятую стратегию (строку), получим в итоге три стратегии: $\mathbf{I_4}$, $\mathbf{I_7}$, $\mathbf{I_{11}}$.

Таким образом, задача сводится к решению игры с платежной матрицей **I** размером (3 × 2), где элементы матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_7 \\ \mathbf{I}_{11} \end{array} \left\| \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ C & D \\ D & C \\ F & F \end{matrix} \right\|, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} C &= a(1 - P_0 - S + PS) + b(P_0 + S - PS), \\ D &= a(P + P_0 - 2PP_0) + b(1 - P - P_0 + 2PP_0), \\ F &= aP + b(1 - P). \end{aligned}$$

Будем решать полученную игру графическим методом. Пусть y – вероятность выбора вторым игроком первой стратегии, $(1 - y)$ – вероятность выбора вторым игроком второй стратегии, а Z_i – выигрыш первого игрока при выборе им i-й чистой стратегии.

Очевидно, случаю

$i = 1$, соответствует стратегия $\mathbf{I}_4$,

$i = 2$, соответствует стратегия $\mathbf{I}_7$,

$i = 3$, соответствует стратегия $\mathbf{I}_{12}$.

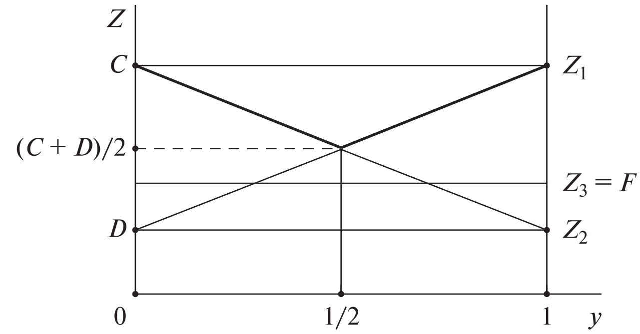

Рис. 4. Выигрыш первого игрока при $P \le P_2$.

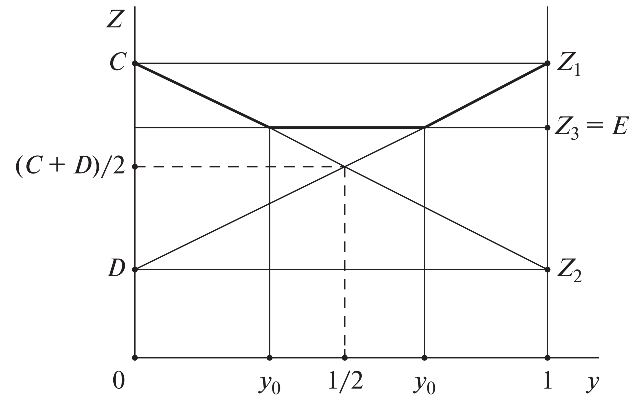

Рис. 5. Выигрыш первого игрока при $P \ge P_2$.

Итак, имеем

$$\begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array}\left\|\begin{array}{cc} y & 1-y \\ C & D \\ D & C \\ F & F \end{array}\right\|, \tag{40}$$

где

$$Z_1 = Cy + D(1-y),$$
$$Z_2 = Dy + C(1-y),$$
$$Z_3 = F.$$

Приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} Z_1 &= (C - D)\,y + D, \\ Z_2 &= (D - C)\,y + C, \\ Z_3 &= F. \end{aligned} \tag{41}$$

Сравнивая между собой значения C и D, получим

$$\begin{aligned} C - D &= a(1 - P - 2P_0(1-P) - S + PS) + \\ &+ b(2P_0 + S - PS - 1 + P - 2PP_0) = \\ &= (a-b)(1-P)(1-2P_0 - S) \ge \\ &\ge (a-b)(1-P)(1-2P_0-2S) \ge 0\,. \end{aligned} \tag{42}$$

I случай*:* $F \le (C + D)/2$*,* или $P \le (1 - S)/(1 - S) + 2P_0) = P_2$.

Выигрыш первого игрока при $P \le P_2$ представлен на рис. 4:

$$v = \min_{y} \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 4 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

Как следует из графика, минимальное значение функции $Z(y)$ достигается при $y = 1/2$ и равно $(C + D)/2$. Значит, цена игры

$$v = (C + D)/2. \tag{43}$$

Оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$\begin{aligned} y_1^* &= 1/2, \\ y_2^* &= 1/2. \end{aligned} \tag{44}$$

Оптимальная стратегия первого игрока находится в виде решения относительно x уравнения

$$xC + (1-x)D = xD + (1-x)C. \tag{45}$$

Итак, решение этого уравнения дает

$$\begin{aligned} x_4^* &= 1/2, \\ x_7^* &= 1/2, \\ x_{11}^* &= 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Очевидно, неравенство $F \le (C + D)/2$ равносильно неравенству

$$(C - F) + (D - F) \ge 0, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} C - F &= a(1 - P_0 - S + PS - P) + \\ &+ b(-1 + P + P_0 + S - PS) = \\ &= (a-b)(1 - P - P_0 - S + P), \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} D - F &= a(P_0 - 2PP_0) + \\ &+ b(-P_0 + 2PP_0) = (a-b)P_0(1-2P). \end{aligned} \tag{49}$$

Отсюда следует

$$P \le (1-S)/(1 - S + 2P_0) = P_2. \tag{50}$$

Цена игры в этом случае

$$v = (a+b)/2 + (a-b)(P - S - 2PP_0 + PS)/2. \tag{51}$$

Перейдем к оставшейся части диапазона параметра P.

$$F \ge (C + D)/2, \text{ или } P \ge (1-S)/(1 - S + 2P_0) = P_2.$$

Выигрыш первого игрока при $P \ge P_2$ представлен на рис. 5.

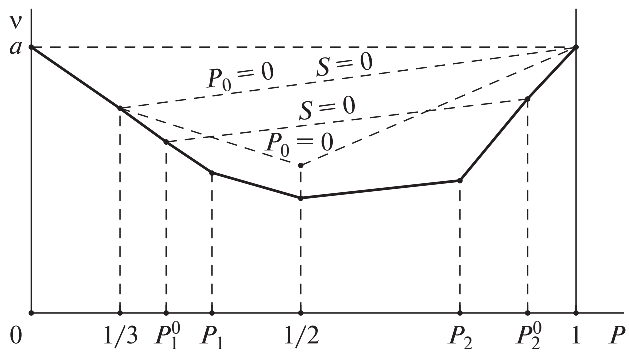

Рис. 6. Зависимость цены игры от априорной вероятности.

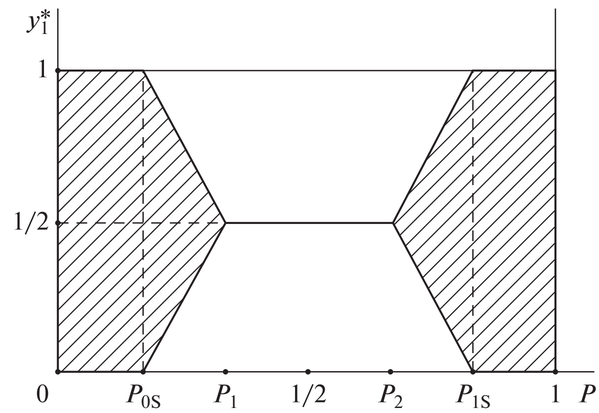

Рис. 7. Оптимальная стратегия второго игрока.

Из теории игр известно [5], что цена игры равна

$$v = \min_y \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

На рис. 5 жирной линией представлен график функции

$$Z(y) = \max_{i=1,3} Z_i(y).$$

Минимум ее достигается на отрезке $[y_0, y^0]$.

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока имеет вид

$$y_1^* \in [y_0, y^0],$$

$$y_2^* = 1 - y_1^*.$$

Границы данного диапазона имеют вид

$$\begin{aligned} y_0 &= (F - C)/(D - C) = (C - F)/(C - D) = \\ &= (1 - P - P_0 - S + PS)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S), \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} y^0 &= (F - D)/(C - D) = \\ &= (2PP_0 - P_0)/(1 - P)(1 - 2P_0 - S). \end{aligned} \tag{53}$$

Легко видеть, что y_0 и y^0 симметричны относительно $y = 1/2$, т.е.

$$y_0 = 1 - y^0.$$

Оптимальная стратегия первого игрока имеет вид

$$\begin{aligned} x_4^* &= 0, \\ x_7^* &= 0, \\ x_{11}^* &= 1. \end{aligned} \tag{54}$$

Цена игры на этой части диапазона равна

$$v = aP + b(1 - P). \tag{55}$$

Итак, получим четыре интервала параметра P:

$$[0, P_1],\ [P_1, 1/2],\ [1/2, P_2],\ [P_2, 1].$$

Зависимость цены игры от априорной вероятности представлена на рис. 6.

На графике приведены также и частные случаи задачи: полное отсутствие помех ($P_0 = 0,\ S = 0$), случай отсутствия стирания ($S = 0$), случай отсутствия помех трансформации ($P_0 = 0$).

Значения параметров, отмеченных на графике, имеют вид

$$P_1 = (1 - S)/(1 - 3S - 2P_0), \tag{56}$$

$$P_2 = (1 - S)/(1 - S + 2P_0), \tag{57}$$

$$P_1^0 = 1/(3 - 2P_0), \tag{58}$$

$$P_2^0 = 1/(1 + 2P_0). \tag{59}$$

Итак, при $P \le P_1$ цена игры равна

$$v = a(1 - P) + bP, \tag{60}$$

при $P_1 \le P \le 1/2$ цена игры –

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P + S - 2PP_0 - 3PS)/2, \tag{61}$$

при $1/2 \le P \le P_2$ цена игры –

$$v = (a + b)/2 + (a - b)(P - S - 2PP_0 + PS)/2, \tag{62}$$

при $P_2 \le P$ цена игры –

$$v = aP + b(1 - P). \tag{63}$$

Оптимальная стратегия второго игрока представлена на рис. 7.

Значения параметров имеют вид

$$P_{0S} = P_0/(1 - S), \tag{64}$$

$$P_{1S} = (1 - P_0 - S)/(1 - S). \tag{65}$$

Очевидно, что P_{0S} и P_{1S} симметричны относительно $P = 1/2$,

$$P_{0S} = 1 - P_{1S}. \tag{66}$$

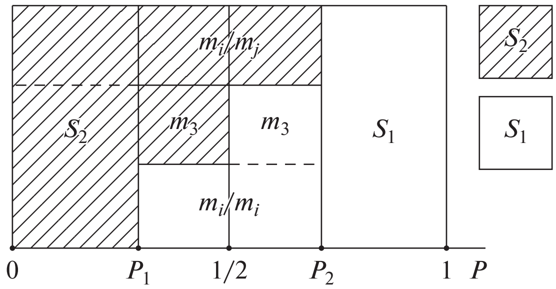

Рис. 8. Оптимальная стратегия системы наблюдения.

3. ИТОГОВОЕ ПРАВИЛО

Решающее правило системы имеет вид:
на отрезке $[0, P_1]$ принимается решение "S_2"

$$m_1 : m_2m_3/m_1\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (67)$$

на отрезке $[P_1, 1/2]$ – решение

$$m_2 : m_1m_3/m_2\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (68)$$

или решение

$$m_1m_3 : m_2/m_1\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (69)$$

на отрезке $[1/2, P_2]$ – решение

$$m_2m_3 : m_1/m_2\} \text{ с вероятностью } 1/2, \quad (70)$$

на отрезке $[P_2, 1]$ принимается решение "S_1".

Оптимальное решение можно представить при $(i \neq j)$ на рис. 8.

Решающее правило системы наблюдения можно представить и в другой форме. Итоговое решающее правило системы наблюдения представлено на рис. 9.

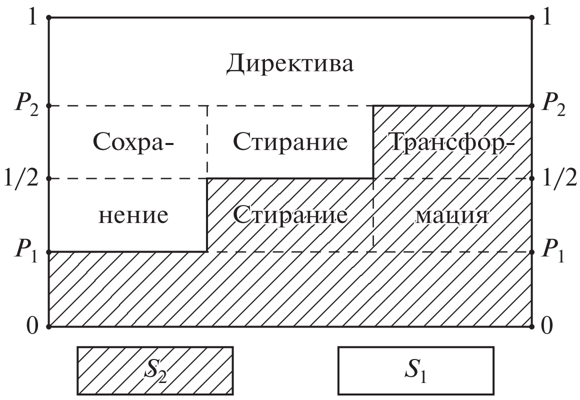

Рис. 9. Итоговое решающее правило системы наблюдения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках госзадания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климов В.В.* // Вопросы математического моделирования. М. ИРЭ АН СССР, 1979. С.25.
2. *Крапивин В.Ф.* Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. М.: Сов. радио, 1972.
3. *Климов В.В.* // Экологические системы и приборы. 2000. № 5. С. 2.
4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972.
5. *Дрешер М.* Стратегические игры. Теория и приложения. М.: Сов. радио, 1964.